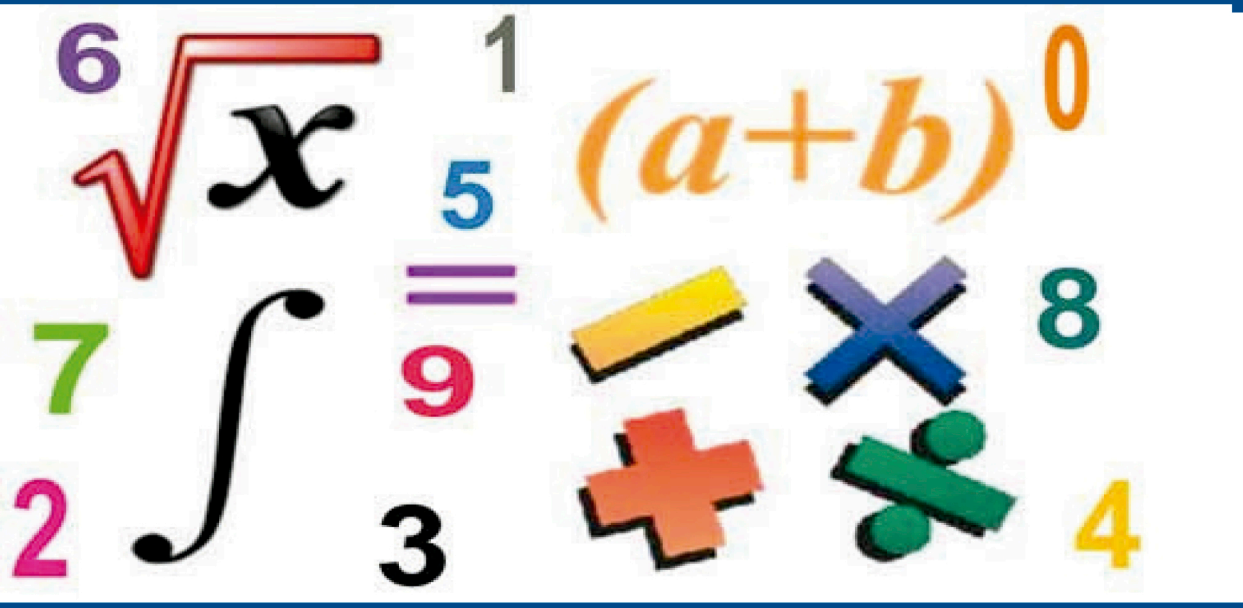
Cadernos dos Cursinhos Pré-Universitários da UNESP

Antonio Francisco Marques
Maria da Graça Mello Magnoni
Editores

Matemática

Nelson Antonio Pirola
Organizador



Volume 2

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

PROEX
PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA

CULTURA ACADÊMICA
Editora

Cadernos dos Cursinhos Pré-Universitários da Unesp

Antonio Francisco Marques
Maria da Graça Mello Magnoni
Editores

Matemática

Nelson Antonio Pirola
Organizador

Volume 2

São Paulo
2016

PROEX
PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA

CULTURA ACADÊMICA Editora

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Realização
Pró-Reitoria de Extensão – PROEX
Rua Quirino de Andrade, 215 – 10° andar
São Paulo, CEP 01049-010 – SP
Tel (11) 5627-0264

Reitor
Julio Cezar Durigan

Vice-reitor
Eduardo Kokubun

Pró-reitora de Extensão Universitária
Mariângela Spotti Lopes Fujita

Pró-reitora de Pesquisa
Maria José Soares Mendes Giannini

Pró-reitor de Graduação
Laurence Duarte Colvara

Pró-reitora de Pós-Graduação
Lourdes Aparecida Martins dos Santos-Pinto

Pró-reitor de Administração
Carlos Antonio Gamero

Secretária Geral
Maria Dalva Silva Pagotto

Produção planejada pelo Projeto "Inovação nos processos de gestão e pedagógico dos Cursos Pré-Vestibulares da Unesp"

Diagramação e capa
Edevaldo Donizeti dos Santos

Impressão e acabamento: Gráfica FCL/Araraquara

Revisão
Élide Feres
Maria Luzinete Euclides
Rony Farto Pereira

Conselho Editorial da PROEX - Unesp
Profa. Dra. Maria Candida Soares Del Masso (FFC / Marília)
Prof. Dr. Claudio César de Paiva (FCL / Araraquara)
Profa. Dra. Márcia Pereira da Silva (FCHS / Franca)
Profa. Dra. Rosane Michelli de Castro (FFC / Marília)
Sra. Angela de Jesus Amaral (PROEX / Reitoria)
Sr. Oscar Kazuyuki Kogiso (ICT / São José dos Campos)

Coordenação geral
Profa. Dra. Mariângela Spotti Lopes Fujita

Editores
Prof. Dr. Antonio Francisco Marques
Profa. Dra. Maria da Graça Mello Magnoni

Organizador
Nelson Antonio Pirola

Colaboradores
Emília de Mendonça Rosa Marques
Evandro Tortora
Fernanda Pizzigatti Marques Jasinevicius
Gabriela Pereira Sander
Gilmara Aparecida da Silva
José Luciano Santinho Lima
Juliana Aparecida da Silva dos Santos Morais
Márcio Rogério Ferreira
Patrícia Priscilla Ferraz da Costa Souza
Richael Silva Caetano
Thais Regina Ueno Yamada

Marcio Rogerio Ferreira
Patricia Priscilla Ferraz da Costa Souza

Revisor de conteúdo
Profa Dra Mara Sueli Simao Moraes

M425 Matemática / Nelson Antonio Pirola, organizador. – [2. ed.] – São Paulo : Cultura Acadêmica, 2016.

296 p. : il. - (Cadernos dos cursinhos pré-universitários da Unesp ; 2)

Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7983-821-7

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Séries aritméticas. 3. Estatística. 4. Geometria. 5. Trigonometria. 6. Universidades e faculdades - Vestibular. I. Pirola, Nelson Antonio. II. Série.

CDD 510.7

Prefácio

A ideia de construção dos conteúdos disciplinares dos 6 cadernos que compõem a 2° Edição do conjunto do material didático a ser utilizado pelos Cursinhos Pré-Universitários[1] surgiu desde o início da gestão, em 2013, durante proveitosas discussões em reuniões com os professores e estudantes na condição, respectivamente, de coordenadores e tutores. Havia, naquela ocasião, uma grande preocupação com relação à disponibilidade do material didático de um ano vigente para um próximo ano, considerando-se a provisão orçamentária. Além disso, havia um desejo dos envolvidos por conteúdos que mais se aproximassem do contexto social e educacional dos cursistas provenientes da escola pública e de famílias de baixa renda, para promover, de modo mais abrangente, a inclusão em um contexto de aquisição e de construção de conhecimentos necessários ao ingresso em cursos de graduação ou no mercado de trabalho, mediante participação em concursos.

O grande desafio da existência dos Cursinhos Pré-Universitários da UNESP sempre foi a oferta do material didático com os conteúdos disciplinares necessários, de um lado, para facilitar o processo comunicativo entre professor e cursista na sala de aula e, de outro, para orientar a aprendizagem do cursista fora da sala de aula. Portanto, o material didático é o instrumento que orienta o processo de aquisição e construção do conhecimento dos cursistas dos Cursinhos Pré-Universitários, em um curto período de tempo, com finalidade definida de ingresso em concursos e, ainda, a fim de propiciar sua inclusão. Nesse sentido, discutiu-se a viabilidade de a UNESP construir material didático próprio, dadas as características únicas de distribuição regional multicampus e da evolução histórica de seus Cursinhos Pré-Universitários, atualmente Subprograma de extensão "Cursinhos Pré-Universitários da UNESP", do programa de extensão "Divulgação, Orientação e Informação Profissional".

Antes de sua concretização, essa discussão levou em consideração resultados de outras iniciativas da Pró-Reitoria de Extensão - PROEX - na tentativa de realizar

[1] Atualmente, existem 27 Cursinhos Pré-Universitários UNESP e 4 Cursinhos em convênios com Prefeituras, em funcionamento, localizados em 23 cidades do interior paulista, junto a Unidades Universitárias da UNESP. O modelo implantado atende a alunos regulares e egressos da rede pública de ensino e oferece aulas ministradas por graduandos dos diversos cursos da UNESP – bolsistas e voluntários –, que visam a suprir lacunas de formação de alunos regulares do 3º ano e egressos do ensino médio, com vistas a oferecer reforço de ensino e preparo para o ingresso e permanência na universidade. Para isso, a UNESP, por meio da Pró-Reitoria de Extensão Universitária, mantém um Programa Institucional com bolsas de extensão universitária para alunos de seus cursos de graduação atuarem como tutores de ensino.

parcerias com editoras comerciais e de organizações não governamentais, dedicadas a cursinhos populares e comunitários, que, após negociações, revelaram impossibilidade de execução.

A proposta de construção do material didático, após debates, foi acolhida por Grupo de Pesquisa da Faculdade de Ciências do Câmpus de Bauru, com inserção e experiência na coordenação de Cursinho Pré-Universitário, o qual elaborou o "Projeto de produção, manutenção e atualização de material didático-pedagógico".

O Projeto, coordenado pela Pró-Reitoria de Extensão Universitária e elaborado pelos Professores Doutores Antonio Francisco Marques e Maria da Graça Mello Magnoni, da Faculdade de Ciências do Campus de Bauru, foi concebido com o objetivo de organizar, adequar e disponibilizar cadernos com os conteúdos curriculares das diversas áreas do conhecimento para as atividades pedagógicas nos cursinhos pré-universitários da UNESP, nas seguintes áreas do conhecimento: "Linguagens e Códigos", "Matemática", "Biologia", "Química", "Física", "Ciências Humanas" e o "Caderno de Material Complementar e de Apoio".

No ano de 2015, foram construídos os conteúdos das áreas de conhecimento que resultaram na publicação da 1° Edição com seus 5 cadernos: Linguagens e Códigos, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Material de Apoio.

A 2° Edição contemplou a atualização, reformulação e inclusão dos conteúdos para publicação dos cadernos, em 2016. Nesta nova edição, o Caderno 3 - Ciências da Natureza que reunia as áreas de Biologia, Química e Física, foi segmentado em três cadernos e cada uma destas áreas se constituiu em um caderno independente.

Não restam dúvidas de que a publicação destes Cadernos representa um passo dado de grande relevância para o aprimoramento dos Cursinhos Pré-Universitários, mas também, de alta responsabilidade social, porquanto deverá influenciar a inclusão, conforme preconiza a Política Nacional de Extensão e a Política de Extensão da UNESP.

Dessa forma, os cadernos serão o instrumento principal da política pedagógica do Subprograma de Extensão "Cursinhos Pré-Universitários da UNESP", com a proposta de unificar a orientação pedagógica dos 27 Cursinhos Pré-Universitários e, ao mesmo tempo, dar visibilidade a essa importante ação de extensão universitária de grande espectro e impacto social, no interior do Estado de São Paulo que, smj, é única no Brasil entre as IES.

Pela atuação dos Professores editores Antonio Francisco Marques e Maria da Graça M. Magnoni, dos autores e dos colaboradores, agradecemos o empenho, esforço e dedicação, ao assumirem a responsabilidade de criação e atualização constante dos conteúdos dos Cadernos que, decisivamente, eleva o patamar de qualidade no atendimento das demandas pelos Cursinhos.

Faz-se mister destacar o apoio incondicional da Reitoria da UNESP, nas pessoas do Prof. Dr. Julio Cezar Durigan, Reitor, e Prof. Dr. Eduardo Kokubun, Vice-Reitor, na idealização e fortalecimento dos Cursinhos Pré-Universitários, o que facilitou a condução de todos os trabalhos de organização da publicação.

Finalmente, é preciso salientar a valiosa atuação dos Cursinhos Pré-Universitários na extensão universitária da UNESP, com resultados de impacto na transformação da realidade social da comunidade externa à Universidade.

Mariângela Spotti Lopes Fujita
Pró-Reitora de Extensão Universitária da Unesp

Apresentação

Apresentamos a 2ª edição da coletânea de cadernos dos Cursinhos Pré-Vestibulares da Unesp.

Considerando a realidade concreta do Ensino Médio e os desafios que ele representa aos poderes públicos, os cursinhos pré-vestibulares apresentam uma ação em prol da democratização do ensino superior brasileiro, na tentativa de minimizar uma realidade histórica e socialmente perversa, que exclui milhões de brasileiros das classes desfavorecidas da participação e ou da aprovação nos concursos vestibulares para ingresso nas universidades públicas. Orientados pela lógica do direito à educação, os cursinhos pré-universitários constituem, então, situações emergenciais enquanto o Estado e a sociedade brasileira não garantirem uma educação básica de qualidade para todos.

Tendo em vista que os Cursos Pré-Universitários da UNESP visam atender às demandas educacionais dos egressos e concluintes do último ano do ensino médio público, os editores e coordenadores dos cadernos optaram pelos conteúdos propostos para a avaliação do ENEM.

Esta edição é uma revisão da edição anterior com ampliação dos conteúdos nas áreas de conhecimento de Linguagem, Matemática, Ciências Naturais, ficando este último subdividido em três cadernos.

Ao permitir à Universidade atender parte dos seus objetivos, o Projeto proporciona ganhos aos seus docentes e discentes. Os alunos dos diferentes cursos ou licenciaturas, na situação de bolsistas e voluntários, têm a possibilidade de ampliar seus conhecimentos ao organizar didaticamente todo o processo de ensino destinado aos cursistas, envolvendo principalmente os conteúdos e as metodologias em função dos diferentes grupos atendidos. Os demais graduandos, não envolvidos diretamente com o Cursinho, são beneficiados mediante a socialização das experiências pelos colegas bolsistas do Projeto, quando em sala de aula, ampliando as relações e vínculos com as atividades práticas na Educação Básica, etapa do ensino para a qual muitos estão em processo de formação.

A situação de aprendizagem para os discentes direta e indiretamente envolvidos ultrapassa, então, os limites dos saberes e práticas curriculares dos conhecimentos específicos, envolvendo experiências relativas às relações que se estabelecem entre todos os envolvidos no processo educativo e que não se restringem aos aspectos cognitivos, mas também afetivos e sociais.

Os investimentos em recursos humanos e financeiros destinados à pesquisa e produção dos recursos materiais voltados à extensão dos resultados à sociedade, através da divulgação do conhecimento científico, tecnológico, mais que concretizar os nossos objetivos de proporcionar o acesso da comunidade à Universidade, nos permite vivenciar a Universidade como perspectiva, como possibilidade para a realização de um trabalho que proporciona o envolvimento pessoal e coletivo, um esforço conjunto de muitas pessoas que assumiram o compromisso da realização, o compromisso com a Universidade Pública e que se auxiliam nas dificuldades, nos contratempos, nas propostas, na coragem para enfrentar as críticas e solucioná-las.

Como já colocado na edição anterior, o trabalho executado tem seus limites, porém é possível aperfeiçoá-lo nas próximas edições, com base nas experiências e avaliações dos usuários estudantes e dos monitores das salas de cursinhos espalhados nas dezenas de unidades universitárias da UNESP.

O material estará disponível para os alunos matriculados nos Cursinhos da UNESP na forma impressa e online, oportunizando aos estudantes externos e demais interessados o acesso livre e gratuito.

Antonio Francisco Marques

Maria da Graça Mello Magnoni

SUMÁRIO

Introdução..... 11
1 Revisão..... 12
2 Números..... 51
3 Progressão Aritmética e Geométrica..... 73
4 Funções..... 82
5 Estatística Descritiva, Análise Combinatória e Probabilidade..... 109
6 Geometria Plana..... 150
7 Geometria Espacial..... 187
8 Trigonometria..... 200
9 Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares..... 218
10 Polinômios e Equações Polinomiais..... 248
11 Números Complexos..... 263
12 Geometria Analítica..... 274
Referências..... 294

Introdução

Prezado(a) aluno(a):

Esta é a edição revista e ampliada do teu Material de Matemática que será utilizado no Cursinho Pré-Vestibular. Após avaliação da primeira edição, procuramos atender a maioria das sugestões, entre elas, acrescentar um capítulo de revisão dos principais conceitos do Ensino fundamental, criar um capítulo específico para Progressões, colocar Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória em um mesmo capítulo e aprofundar alguns temas.

Salientamos que este é um material de revisão dos principais conteúdos que são requeridos nos vestibulares e, principalmente, no ENEM. Em cada capitulo, apresentamos uma revisão e alguns problemas resolvidos. Em ambiente online será disponibilizada uma série de exercícios que complementará este material.

A aprendizagem de Matemática depende, além da compreensão de conceitos e princípios, da resolução de problemas e exercícios variados, com diferentes graus de dificuldades, em que os conhecimentos adquiridos podem ser mobilizados da estrutura cognitiva e utilizados em diferentes contextos. Há problemas, principalmente aqueles exigidos no ENEM, que exigem aplicação dos conceitos matemáticos para a resolução de problemas de outras áreas do conhecimento, como Química, Física, Geografia, Biologia, entre outras.

O estudo da Matemática deve ser contínuo. Desta forma, sugerimos que ao término de capítulo estudado, você faça todos os exercícios e tire as suas dúvidas com o professor.

Aproveite bastante este material e desejo que tenha sucesso nos vestibulares e no ENEM que venha a prestar.

Bom estudo!!!!

Nelson Antonio Pirola (**organizador**)

1 REVISÃO

Neste capítulo serão revisados alguns conteúdos de Matemática abordados no Ensino Fundamental.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS (ℚ)

FRAÇÃO

Definição: Sejam a e b números inteiros, com b diferente de zero $(b \neq 0)$. Denomina-se ***fração*** a razão $\frac{a}{b}$, na qual a é o ***numerador*** e b é o ***denominador*** da fração.

Observação: Lembre-se de que todo número inteiro pode ser representado na forma fracionária. Nesse caso, o denominador é 1. Por exemplo: $3 = \frac{3}{1}$; $-15 = -\frac{15}{1}$.

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Uma das maneiras para simplificar frações é através do máximo divisor comum (mdc). Observe o exemplo seguinte:

Ex.: Simplifique a fração $\frac{12}{8}$.

1.º Calcula-se o mdc considerando o numerador (12) e o denominador (8):

12	2
6	2
3	3
1	

8	2
4	2
2	2
1	

Destacam-se, em negrito, os fatores comuns dos números 12 e 8. Para obter o mdc, basta multiplicá-los: $2 \cdot 2 = 4$

Assim, o mdc (12, 8) = 4.

2.º Em seguida, divide-se o numerador e o denominador pelo mdc obtido:

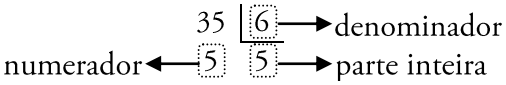
$$\frac{12}{8}=\frac{12\div 4}{8\div 4}=\frac{3}{2}$$

REPRESENTAÇÃO NA FORMA DE FRAÇÃO MISTA

Há situações em que o numerador é maior que o denominador. Nesse caso, cuja fração recebe o nome de ***fração imprópria***, podemos representar a fração em sua forma mista, ou seja, indicando (e separando) a parte inteira da parte fracionária. Observe o exemplo seguinte:

Ex.: Escrever $\frac{35}{6}$ em forma de fração mista.

1.º Divide-se o numerador (35) pelo denominador (6) utilizando o método euclidiano de divisão:



2.º O quociente (5) representa a parte inteira da fração mista. O resto (5) representa o numerador, já o divisor (6) indica o denominador. Assim, a forma de fração mista é denotada do seguinte modo:

$5\frac{5}{6}$ (Lê-se cinco inteiros e cinco sextos)

Observação**:** Para transformar a forma de fração mista em fração, procede-se do seguinte modo:

Transformam-se as 5 partes inteiras em fração com denominador 6.

$$5\frac{5}{6}=\frac{\overbrace{5\cdot 6}}{6}+\frac{5}{6}=\frac{30+5}{6}=\frac{35}{6}$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

1.º Caso: **Frações com denominadores iguais**

Para adicionar (ou subtrair) frações com denominadores iguais, conserva-se o denominador e adiciona-se (ou subtrai-se) os numeradores. Observe o exemplo a seguir:

a) $\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8+4}{9}=\frac{12}{9}$

b) $\frac{5}{8}-\frac{7}{8}+\frac{10}{8}=\frac{5-7+10}{8}=\frac{-2+10}{8}=\frac{8}{8}=1$

2.º Caso: **Frações com denominadores diferentes**

Para adicionar (ou subtrair) frações com denominadores diferentes, pode se proceder da seguinte maneira:

Ex.: Consideremos a adição $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$.

1.º Calcula-se o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores 3 e 5:

3, 5	3
1, 5	5
1, 1	

$3\cdot 5=15$

Para calcular o mmc, multiplicam-se os fatores obtidos pelo método da decomposição em fatores primos.

Assim, mmc (3, 5) = 15.

2.º Reduz-se as frações a um mesmo denominador, no caso, ao denominador 15, já que o mesmo é o mínimo múltiplo comum entre os denominadores 3 e 5:

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{10}{15}$$

Note que $\frac{2}{3}$ e $\frac{10}{15}$ são frações equivalentes.

$$\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{12}{15}$$

Note que $\frac{4}{5}$ e $\frac{12}{15}$ são frações equivalentes.

3.º Obtidas as frações equivalentes com denominadores iguais, procede-se conforme o 1.º Caso:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$$

Assim, $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$.

MULTIPLICAÇÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

Para multiplicar frações, multiplicam-se os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Observe os exemplos a seguir:

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}$ | b) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2\cdot4\cdot6}{9\cdot3\cdot5}=\frac{48}{135}$

c) A expressão $\frac{3}{4}$ de 20 significa $\frac{3}{4}\cdot 20$. Assim,

$\frac{3}{4}$ de $20=\frac{3}{4}\cdot 20=\frac{3\cdot 20}{4}=\frac{60}{4}=15.$

DIVISÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

Para dividir duas frações, conserva-se a primeira e a multiplica pelo inverso da segunda fração. Observe os exemplos a seguir:

a) $\frac{10}{13}\div\frac{6}{7}=\frac{10}{13}\cdot\frac{7}{6}=\frac{10\cdot7}{13\cdot6}=\frac{70}{78}$ | b) $\frac{1}{2}\div 5=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1\cdot1}{2\cdot5}=\frac{1}{10}$

NÚMERO DECIMAL

Fração decimal é toda fração cujo denominador é uma potência de 10 (10, 100, 1000, etc.). Observe, a seguir, alguns exemplos:

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$\frac{2}{10}$	$-\frac{17}{10}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{168}{100}$	$\frac{5}{1000}$	$-\frac{49}{1000}$	$\frac{324}{1000}$	$\frac{5324}{1000}$

Além da forma fracionária, podemos representar tal número como sendo um ***número decimal***. Observe os exemplos seguintes:

a) $\frac{5}{10}=0{,}5$ | b) $-\frac{89}{100}=-0{,}89$ | c) $\frac{368}{100}=3{,}68$ | d) $\frac{7621}{1000}=7{,}621$

Na representação do número decimal, utiliza-se a vírgula (**,**) para separar a classe dos inteiros da classe dos decimais (partes não inteiras/fracionárias). No exemplo a), o algarismo **0** – escrito antes da vírgula – indica que a parte inteira do número é nula, já a parte não inteira (o algarismo **5**) ocupa a ordem dos ***décimos***, ficando a leitura do número como ***cinco décimos***. No exemplo c), o algarismo **3** – escrito antes da vírgula – indica que o número possui 3 partes inteiras, já os

algarismos **6** e **8** ocupam a ordem dos ***décimos*** e ***centésimos***, respectivamente. A leitura de tal número é ***três inteiros e sessenta e oito centésimos***.

No quadro seguinte denota-se a separação da classe dos inteiros da classe dos não inteiros:

Classe dos inteiros								Classe dos não inteiros						
ORDEM								ORDEM						
…	6.ª	5.ª	4.ª	3.ª	2.ª	1.ª		1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	…
…	Centena de Milhar	Dezena de Milhar	Unidade de Milhar	Centena	Dezena	Unidade	,	Décimo	Centésimo	Milésimo	Décimo de Milésimo	Centésimo de Milésimo	Milionésimo	…
Exemplos						0	,	5						
						0	,	8	9					
					5	3	,	6	8	4				

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO ENVOLVENDO NÚMEROS DECIMAIS

Ao adicionar (ou subtrair) números decimais, devem-se respeitar as ordens ocupadas pelos algarismos durante a realização da operação. Por exemplo, os décimos só podem ser adicionados a outros décimos. Observe alguns exemplos:

a)

$1{,}36 + 8{,}07 = 9{,}43$

$$\begin{array}{r} 1\,, \;\vdots\; {}^{1}3 \;\vdots\; 6 \\ +\; 8\,, \;\vdots\; 0 \;\vdots\; 7 \\ \hline 9\,, \;\vdots\; 4 \;\vdots\; 3 \end{array}$$

b)

$8{,}6 - 7{,}54 = 1{,}06$

$$\begin{array}{r} 8\,, \;\vdots\; {}^{5}6 \;\vdots\; {}^{1}0 \\ -\; 7\,, \;\vdots\; 5 \;\vdots\; 4 \\ \hline 1\,, \;\vdots\; 0 \;\vdots\; 6 \end{array}$$

c)

$8{,}72 + 0{,}858 + 8{,}576 = 18{,}154$

$$\begin{array}{r} {}^{2}8\,, \;\vdots\; {}^{1}7 \;\vdots\; {}^{1}2 \;\vdots\; 0 \\ +\; 0\,, \;\vdots\; 8 \;\vdots\; 5 \;\vdots\; 8 \\ 8\,, \;\vdots\; 5 \;\vdots\; 7 \;\vdots\; 6 \\ \hline 1 \;\vdots\; 8\,, \;\vdots\; 1 \;\vdots\; 5 \;\vdots\; 4 \end{array}$$

Observação: Note que, no registro do algoritmo, cada ordem (de cada número) ficou uma abaixo da outra, bem como as vírgulas.

MULTIPLICAÇÃO ENVOLVENDO NÚMEROS DECIMAIS

Para multiplicar números decimais, procede-se como se fosse uma multiplicação de números naturais. Obtido o produto, somam-se as ordens decimais dos fatores (dos números multiplicados entre si) para saber quantas ordens decimais terá o resultado. Observe os exemplos seguintes:

Ex.: a) $10{,}7 \times 5{,}9 = 63{,}13$

$$\begin{array}{rl} 10,7 & \longrightarrow 1 \text{ ordem decimal} \\ \times\ 5,9 & \longrightarrow 1 \text{ ordem decimal} \\ \hline {}^{1}963 & \\ +\ {}^{1}5350 & \\ \hline 63,13 & \longrightarrow 2 \text{ ordens decimais} \end{array}$$

b) $3{,}62 \times 2{,}6 = 9{,}412$

$$\begin{array}{rl} 3,62 & \longrightarrow 2 \text{ ordens decimais} \\ \times\ 2,6 & \longrightarrow 1 \text{ ordem decimal} \\ \hline 2\,{}^{1}172 & \\ +\ 7240 & \\ \hline 9,412 & \longrightarrow 3 \text{ ordens decimais} \end{array}$$

Observação: Para 'justificar' tal regra prática (soma das ordens decimais dos fatores para determinar a quantidade de ordens decimais do resultado) observemos o seguinte exemplo:

Consideremos a multiplicação 0,1 (um décimo) × 0,1 (um décimo). Sabendo que a representação fracionária de tais números é $\frac{1}{10}$, temos:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1 \cdot 1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} \left(\text{um centésimo}\right).$$

Note que $\frac{1}{100} = 0{,}01$, ou seja, um número decimal constituído por 2 ordens decimais. Assim, ao multiplicar dois números decimais constituídos por 1 ordem decimal cada $\left[0{,}1\left(\text{um décimo}\right)\right]$ obtemos, como resultado, um número decimal constituído por 2 ordens decimais. Observe que a quantidade de ordens decimais do resultado coincide com a soma das ordens decimais dos números multiplicados entre si. Portanto, para determinar a quantidade de ordens decimais do produto (resultado), basta somar a quantidade de ordens decimais de cada número a ser multiplicado.

DIVISÃO ENVOLVENDO NÚMEROS DECIMAIS

Na divisão envolvendo números decimais, iguala-se o número de ordens decimais do dividendo e do divisor. Para tanto, acrescentam-se zeros (o tanto quanto necessários) após a última ordem decimal de tais números. Em seguida,

elimina-se a vírgula de ambos os números e realiza-se a divisão. Observe os exemplos a seguir:

Ex.: a) $5{,}475 \div 3{,}65 = 1{,}5$

$5,\underbrace{475}_{\text{3 ordens decimais}}$

$3,\underbrace{65}_{\text{2 ordens decimais}}$

Elimina-se a vírgula.

$$\begin{array}{r|l} 5475 & 3650 \\ -\,3650 & 1,5 \\ \hline 18250 & \\ -\,18250 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

O zero é acrescido.

b) $31{,}6 \div 4{,}5 = 7{,}0222\ldots$

Como 31,6 e 4,5 possuem o mesmo número de ordens decimais, então, elimina-se a vírgula e realiza-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 316 & 45 \\ -\,315 & 7{,}022\ldots \\ \hline 100 & \\ -\,90 & \\ \hline 100 & \\ -\,90 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Observação: Para 'justificar' tal regra prática (igualar as ordens decimais do dividendo e do divisor, eliminar a vírgula e realizar a divisão) analisemos o primeiro exemplo:

Consideremos a divisão $5{,}475 \div 3{,}65$. Note que o dividendo $(5{,}475)$ possui 3 ordens decimais, já o divisor $(3{,}65)$ possui 2 ordens decimais. Utilizando a representação fracionária, temos que $5{,}475 = \dfrac{5475}{1000}$ e $3{,}65 = \dfrac{365}{100}$. Para igualar o denominador de ambas as frações, é necessário multiplicar o numerador e o denominador da segunda $\left(\dfrac{365}{100}\right)$ por 10: $\dfrac{365 \cdot 10}{100 \cdot 10} = \dfrac{3650}{1000}$. Daí, temos a divisão $\dfrac{5475}{1000} \div \dfrac{3650}{1000} = \dfrac{5475}{1000} \cdot \dfrac{1000}{3650} = \dfrac{5475}{3650}$. Como toda fração é uma razão entre dois números inteiros, então:

$$5{,}475 \div 3{,}65 = \overbrace{\left[\underbrace{\frac{5475}{1000}}_{\text{Milésimos}}\right] \div \left[\underbrace{\frac{3650}{1000}}_{\text{Milésimos}}\right]}^{\text{As ordens decimais estão igualadas, ou seja, milésimo será dividido por milésimo.}} = \frac{5475}{3650} = 5475 \div 3650$$

Observe que os números 5475 e 3650, ambos milésimos, não possuem vírgula. E, conforme a transformação acima, acrescentou-se um zero após o

algarismo 5 do número 3,65 em sua representação fracionária para denominador 1000. Portanto, para dividir dois números decimais, deve-se igualar as ordens decimais (quando necessário) acrescentando-se zeros após a última ordem decimal e eliminar a vírgula.

POTENCIAÇÃO

Definição: Seja a um número real e n um número inteiro. Denomina-se ***potência*** a expressão a^n, onde a é chamado ***base*** e n recebe o nome de ***expoente***. Consideremos os seguintes casos:

1.º Caso: Se n é maior que 1, então a^n é igual ao produto de n fatores idênticos de a, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores idênticos}}$$

Ex.: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Atenção! As potências $(-a)^n$ e $-a^n$, geralmente, apresentam resultados diferentes. Veja o exemplo a seguir:

$$\left.\begin{array}{l} (-4)^4 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = 256 \\ -4^4 = -(4)\cdot(4)\cdot(4)\cdot(4) = -256 \end{array}\right\} \quad 256 \neq -256$$

2.º Caso: Se $n = 1$, então $a^1 = a$. **Ex.:** $5^1 = 5$.

3.º Caso: Se $n = 0$ e $a \neq 0$, então $a^0 = 1$. **Ex.:** $2^0 = 1$.

4.º Caso: Se n é menor que 0 (ou seja, o expoente é um número negativo), então:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ com } a \neq 0.$$

Ex.: a) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1\cdot 1}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}$

b) $(-6)^{-3} = \left(\frac{1}{(-6)}\right)^3 = \frac{1^3}{-6^3} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)} = \frac{1}{-216} = -\frac{1}{216}$

PROPRIEDADES

Considerando a e b números reais, m e n números inteiros, são válidas as propriedades a seguir:

1.ª Propriedade: **Produto de potências de mesma base**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para multiplicarmos potências de mesma base, *conservamos* a base e *adicionamos* os expoentes.

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = \\ = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Observe que:

$$3^2 + 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = \\ = 9 \cdot 27 = 243$$

2.ª Propriedade: **Quociente de potências de mesma base**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ com } a \neq 0.$$

Para dividirmos potências de mesma base, *conservamos* a base e subtraímos os expoentes.

a) $\dfrac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = 7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

Observe que:

$$\frac{7^4}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{2401}{49} = 49$$

b) $\dfrac{12^6}{12^6} = 12^{6-6} = 12^0 = 1$

Note que este exemplo justifica o 3.º Caso $\left(a^0 = 1\right)$.

3.ª Propriedade: **Produto de potências de mesmo expoente**

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Para multiplicarmos potências de mesmo expoente, *conservamos* o expoente e *multiplicamos* as bases.

$$6^2 \cdot 3^2 = (6 \cdot 3)^2 = 18^2 = 18 \cdot 18 = 324$$

Observe que:

$$6^2 \cdot 3^2 = (6 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 3) = 36 \cdot 9 = 324$$

4.ª Propriedade: **Quociente de potência de mesmo expoente**

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \text{com } b \neq 0.$$

Para dividirmos potências de mesmo expoente, *conservamos* o expoente e *dividimos* as bases.

$$\frac{10^4}{5^4} = \left(\frac{10}{5}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Observe que:

$$\frac{10^4}{5^4} = \frac{10000}{625} = 16$$

5.ª Propriedade: **Potência de uma potência**

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Para elevarmos uma potência a um novo expoente, *conservamos* a base e *multiplicamos* os expoentes.

$$\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$$

Observe que:

$$\left(2^2\right)^3 = (4)^3 = 64$$

Atenção! As potências $\left(a^m\right)^n$ e a^{m^n}, geralmente, apresentam resultados diferentes. Veja o exemplo a seguir:

$$\left.\begin{array}{l} \left(3^2\right)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729 \\ 3^{2^3} = 3^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3^8 = 6561 \end{array}\right\} \text{Observe que os resultados são diferentes.}$$

RADICIAÇÃO

Definição: Seja a um número real e n um número natural maior que 1. O número b é chamado ***raiz enésima de*** a se, e somente se, elevado ao expoente n, resulta em a.

$$b \text{ é a raiz enésima de } a \Leftrightarrow b^n = a$$

Simbolicamente, representa-se $\sqrt[n]{a} = b$, no qual $\sqrt{\ }$ é denominado ***radical***, a é o ***radicando*** e n é o ***índice*** da raiz. Observe alguns exemplos a seguir:

a) $\sqrt[2]{36} = 6, \text{pois } 6^2 = 36$ (Lê-se ***raiz quadrada*** de 36. Quando o índice é 2, por convenção, omite-o da raiz, ficando $\sqrt{36}$.)

b) $\sqrt[3]{27} = 3, \text{ pois } 3^3 = 27$ (Lê-se ***raiz cúbica*** de 27.)

c) $\sqrt[1]{4} = 4, \text{ pois } 4^1 = 4$ (Lê-se ***raiz primeira*** de 4.)

Em relação às condições de existência da ***raiz enésima de*** a no conjunto dos números reais, observamos os seguintes casos:

1.º Caso: Se $a = 0$ e n pertence ao conjunto dos números naturais maior que 1, então existe uma única raiz enésima que é o próprio zero: $\sqrt[n]{0} = 0$.

2.º Caso: Se a é estritamente negativo e n é par, então não existe raiz enésima de a.

3.º Caso: Se a pertence ao conjunto dos números reais e n é impar e maior que 1, então existe uma única raiz enésima de a.

PROPRIEDADES

Considerando a e b números reais positivos e m, n e p números naturais diferentes de zero, são válidas as propriedades a seguir:

1.ª Propriedade: **Produto de radicais de mesmo índice**

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

Para multiplicarmos radicais com o mesmo índice, *conservamos* o índice e *multiplicamos* os radicandos.

a) $\sqrt[5]{4^3} \cdot \sqrt[5]{4^2} = \sqrt[5]{4^3 \cdot 4^2} = \sqrt[5]{4^{3+2}} = \sqrt[5]{4^5} = 4$

b) $\sqrt[6]{6^3} \cdot \sqrt[6]{6^{-2}} = \sqrt[6]{6^3 \cdot 6^{-2}} = \sqrt[6]{6^{3-2}} = \sqrt[6]{6}$

2.ª Propriedade: **Divisão de radicais de mesmo índice**

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, \text{com } b \neq 0$$

Para dividirmos radicais com o mesmo índice, *conservamos* o índice e *dividimos* os radicandos.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

b) $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$

3.ª Propriedade: **Potência de uma raiz**

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Para elevarmos uma raiz a um expoente, *elevamos* o radicando a esse expoente.

a) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^2 = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^1}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 2$

4.ª Propriedade: **Raiz de outra raiz**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Para obtermos a raiz de outra raiz, *conservamos* o radicando e *multiplicamos* os índices.

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[2 \cdot 3]{12} = \sqrt[6]{12}$

b) $\sqrt[15]{32} = \sqrt[3 \cdot 5]{2^5} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}} = \sqrt[3]{2}$

5.ª Propriedade: **Simplificação de radicais**

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} \qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \div p]{a^{n \div p}}$$

Quando multiplicamos ou dividimos o índice de uma raiz e o expoente de seu radicando por um mesmo número natural não nulo, o *valor da raiz não se altera*.

$$\sqrt[6]{15^2} = \sqrt[6 \div 2]{15^{2 \div 2}} = \sqrt[3]{15}$$

SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

Simplificar um radical significa transformá-lo em uma expressão equivalente ao radical dado, de modo que sua escrita seja mais simples. Para tal transformação, utilizam-se as propriedades estudadas anteriormente. Observe os exemplos seguintes:

Ex.: a) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{a^{10}}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\dfrac{64}{2}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{a^{10}}{a^5}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{a^{10-5}} =$

$\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5\div 5]{2^{5\div 5}} \cdot \sqrt[5\div 5]{a^{5\div 5}} = 2 \cdot a$

b) $\sqrt[4]{625 \cdot a^5 \cdot b^9 \cdot c^7} = \sqrt[4]{5^4 \cdot a^5 \cdot b^9 \cdot c^7} = \sqrt[4]{5^4 \cdot a^4 \cdot a \cdot b^8 \cdot b \cdot c^4 \cdot c^3} =$

$= \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b^8} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c^4} \cdot \sqrt[4]{c^3} =$

$= \sqrt[4\div 4]{5^{4\div 4}} \cdot \sqrt[4\div 4]{a^{4\div 4}} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4\div 4]{b^{8\div 4}} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4\div 4]{c^{4\div 4}} \cdot \sqrt[4]{c^3} =$

$= 5 \cdot a \cdot \sqrt[4]{a} \cdot b^2 \cdot \sqrt[4]{b} \cdot c \cdot \sqrt[4]{c^3} = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot c \cdot \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c^3}$

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Definição: Seja a um número real positivo, m um número inteiro e n um número natural diferente de zero. Define-se potência de base a e expoente $\dfrac{m}{n}$ como $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Observe alguns exemplos a seguir:

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $5^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{5^{-4}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^4} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{625}}$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3\cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$

PROPRIEDADES

Todas as propriedades já estudadas envolvendo as potências de expoentes inteiros são válidas para as potências de expoentes racionais.

FATORAÇÃO

Definição: ***Fatorar*** uma expressão algébrica significa ***transformar*** sua forma de ***soma algébrica*** em ***produto***, ou seja, através da fatoração pretende-se obter outra expressão que seja equivalente à expressão dada, cuja forma equivalente apresente-se como um ***produto***. Em muitos casos, o resultado de uma fatoração é um ***produto notável***. Pelo fato de obedecer algumas leis de formação, os ***produtos notáveis*** são utilizados para agilizar/facilitar determinados tipos de cálculos.

Sejam a, b, c, x e y expressões não fatoráveis. Observe alguns casos de fatoração:

1.º Caso: **Fator comum**: Identifica-se o fator comum, coloca-o em evidência e simplifica-se a expressão deixando entre parênteses a soma algébrica.

$$\overbrace{ax+bx}^{\text{soma algébrica}} = \overbrace{x\cdot(a+b)}^{\text{produto}} \quad x \text{ é o fator comum}$$

a) $3xy+6x = \overbrace{3x}^{\text{fator comum}} \cdot(y+2)$

b) $8y^3-24xy = \overbrace{8y}^{\text{fator comum}} \cdot(y^2-3x)$

2.º Caso: **Agrupamento**: Inicialmente, organizam-se os termos da expressão algébrica de modo que sejam formados dois ou mais grupos entre os quais haja um fator comum. Em seguida, coloca-se tal fator comum em evidência.

$$ax+bx+ay+by = \overbrace{\underbrace{x\cdot(a+b)}_{1.^{\circ}\text{Grupo}} + \underbrace{y\cdot(a+b)}_{2.^{\circ}\text{Grupo}}}^{\text{O fator comum é } (a+b).} = (a+b)\cdot(x+y)$$

$$4xy-5y+8x^3-10x^2 = \overbrace{\underbrace{y\cdot(4x-5)}_{1.^{\circ}\text{Grupo}} + \underbrace{2x^2\cdot(4x-5)}_{2.^{\circ}\text{Grupo}}}^{\text{O fator comum é } (4x-5).} = (4x-5)\cdot(y+2x^2)$$

3.º Caso: **Diferença de quadrados**: Utiliza-se tal fatoração quando a expressão algébrica é formada por uma diferença entre dois monômios cujas partes literais possuem expoentes pares. Para realizar a fatoração, extraem-se as raízes quadradas de cada um dos monômios; em seguida, escreve-se a expressão como produto da soma pela diferença dos novos monômios obtidos.

$$\underbrace{\underbrace{a^2}_{\sqrt{a^2}=a} - \underbrace{b^2}_{\sqrt{b^2}=b}}_{\text{Monômios obtidos } a \text{ e } b} = \overbrace{(a+b)\cdot(a-b)}^{\text{Produto da soma pela diferença dos monômios } a \text{ e } b.}$$

Note que:

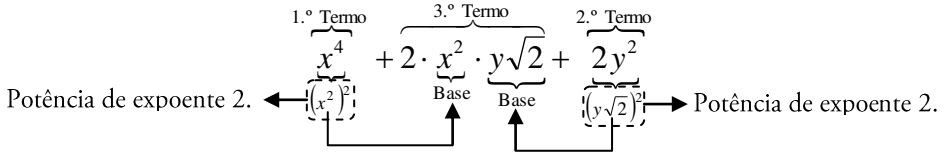
$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2.$

a) $\underbrace{5x^2}_{\sqrt{5x^2}=x\sqrt{5}} - \underbrace{y^6}_{\sqrt{y^6}=y^3} = \overbrace{\left(x\sqrt{5}+y^3\right)\cdot\left(x\sqrt{5}-y^3\right)}^{\text{Produto da soma pela diferença dos monômios } x\sqrt{5} \text{ e } y^3.}$

b) $\underbrace{x^2y^4}_{\sqrt{x^2y^4}=xy^2} - \underbrace{16}_{\sqrt{16}=4} = \overbrace{\left(xy^2+4\right)\cdot\left(xy^2-4\right)}^{\text{Produto da soma pela diferença dos monômios } xy^2 \text{ e } 4.}$

Observe que o resultado deste caso de fatoração é o ***produto notável*** $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ denominado ***produto da soma pela diferença de dois termos.***

4.º Caso: **Trinômio do quadrado perfeito:** Utiliza-se essa fatoração quando a expressão algébrica é um trinômio (polinômio com três monômios) que forma um quadrado perfeito. Trinômio do quadrado perfeito é todo trinômio no qual dois de seus termos podem ser representados como potências de expoente 2, já o terceiro termo é igual a mais (ou menos) o dobro do produto das bases de tais potências. Por exemplo:



Assim, ao fatorar este trinômio deve-se escrevê-lo como sendo o quadrado da soma (ou da diferença) entre tais bases, cuja soma (ou diferença) depende do sinal do 3.º termo:

$$\underbrace{x^4+2x^2y\sqrt{2}+2y^2}_{\text{Quadrado da soma das bases.}} = \overbrace{\left(x^2+y\sqrt{2}\right)^2}^{\text{Quadrado da soma das bases.}}$$

Note que:

$$\left(x^2+y\sqrt{2}\right)^2 = \left(x^2+y\sqrt{2}\right)\cdot\left(x^2+y\sqrt{2}\right) =$$

$$= x^2\cdot x^2 + x^2y\sqrt{2} + y\sqrt{2}x^2 + y\sqrt{2}\cdot y\sqrt{2} = x^4+2x^2y\sqrt{2}+2y^2$$

Em sua forma geral, podemos representar este caso de fatoração como:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad\qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Observe que tal fatoração resulta em outro ***produto notável***, subdivido em:

1.º) ***Quadrado da soma de dois termos***: $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2ab+b^2$

2.º) ***Quadrado da diferença de dois termos***: $(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-2ab+b^2$

5.º Caso: **Soma e diferença de cubos**: Neste caso de fatoração, observam-se 2 tipos:

1.º) **Soma de cubos**: $a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)$

Ex.: $x^3+64=\underbrace{x}_{a}^3+\underbrace{4}_{b}^3=(x+4)\cdot(x^2-x\cdot 4+4^2)=(x+4)\cdot(x^2-4x+16)$

Note que:

$$(x+4)\cdot(x^2-4x+16)=x^3-4x^2+16x+4x^2-16x+64=x^3+64$$

2.º) **Diferença de cubos**: $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)$

Ex.: $125z^3-8=\left(\underbrace{5z}_{a}\right)^3-\underbrace{2}_{b}^3=(5z-2)\cdot((5z)^2+5z\cdot 2+2^2)=$

$$=(5z-2)\cdot(25z^2+10z+4)$$

Note que:

$$(5z-2)\cdot(25z^2+10z+4)=125z^3+50z^2+20z-50z^2-20z-8=125z^3-8$$

6.º Caso: **Cubo perfeito**: Neste caso de fatoração, observam-se 2 tipos:

1.º) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

Desenvolvendo $(a+b)^3$ temos:

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)\cdot\overbrace{(a+b)^2}^{\text{Quadrado da soma de dois termos.}}=(a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Ex.:

$$8z^3+12\sqrt[3]{4}z^2+6\sqrt[3]{16}z+4=\left(\underbrace{2z}_{a}\right)^3+3\cdot\left(\underbrace{2z}_{a}\right)^2\cdot\underbrace{\sqrt[3]{4}}_{b}+3\cdot\left(\underbrace{2z}_{a}\right)\cdot\left(\underbrace{\sqrt[3]{(4)}}_{b}\right)^2+\left(\underbrace{\sqrt[3]{4}}_{b}\right)^3=$$
$$=\left(2z+\sqrt[3]{4}\right)^3$$

Verificando:

$$\left(2z+\sqrt[3]{4}\right)^3=\left(2z+\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(2z+\sqrt[3]{4}\right)^2=\left(2z+\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(4z^2+4z\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right)=$$
$$=8z^3+8\sqrt[3]{4}z^2+2\left(\sqrt[3]{4}\right)^2z+4\sqrt[3]{4}z^2+4\left(\sqrt[3]{4}\right)^2z+\left(\sqrt[3]{4}\right)^3=$$
$$=8z^3+12\sqrt[3]{4}z^2+6\sqrt[3]{16}z+4$$

2.º) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

Desenvolvendo $(a-b)^3$ temos:

$$(a-b)^3=(a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b)=(a-b)\cdot\overbrace{(a-b)^2}^{\text{Quadrado da diferença de dois termos.}}=(a-b)\cdot(a^2-2ab+b^2)=$$
$$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ex.: $t^3-t^2+\frac{t}{3}-\frac{1}{27}=\left(\underbrace{t}_{a}\right)^3-3\cdot\left(\underbrace{t}_{a}\right)^2\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{b}\right)+3\cdot\left(\underbrace{t}_{a}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{b}\right)^2-\left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{b}\right)^3=\left(t-\frac{1}{3}\right)^3$

Verificando:

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)^3=\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(t-\frac{1}{3}\right)^2=\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(t^2-\frac{2t}{3}+\frac{1}{9}\right)=$$
$$=t^3-\frac{2t^2}{3}+\frac{t}{9}-\frac{t^2}{3}+\frac{2t}{9}-\frac{1}{27}=t^3-\frac{3t^2}{3}+\frac{3t}{9}-\frac{1}{27}=t^3-t^2+\frac{t}{3}-\frac{1}{27}$$

Observe que, como resultado de tais fatorações, obtemos outro ***produto notável***, subdivido em:

1.º) ***Cubo da soma de dois termos***: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2.º) ***Cubo da diferença de dois termos***: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

A seguir constam três exemplos nos quais são utilizados alguns dos casos de fatoração/produtos notáveis estudados:

Exemplo 1 (VUNESP): Dado que $a+b=5$ e $ab=2$, qual é o valor numérico de a^2+b^2?

a) 5 b) 2 c) 10 d) 21 e) 25

Resolução: Sabe-se, a partir do 4.º caso de fatoração, que $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Somando-se $(-2ab)$ a ambos os membros da igualdade, temos:

$$a^2+2ab+b^2+(-2ab)=(a+b)^2+(-2ab) \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

Como foi dado que $a+b=5$ e $ab=2$, então, é possível determinar o valor numérico de a^2+b^2:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \Rightarrow a^2+b^2=(5)^2-2\cdot 2=25-4 \Rightarrow a^2+b^2=21$$

Logo, o valor numérico de a^2+b^2 é 21.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d**.

Exemplo 2 (MACKENZIE): Se $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$, então $a+a^{-1}$ vale:

a) $\frac{100}{9}$ b) $\frac{82}{3}$ c) $\frac{82}{9}$ d) $\frac{100}{82}$ e) $\frac{16}{9}$

Resolução: Conforme o enunciado, sabe-se que $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$. Elevando-se ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos

$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100}{9}$. Aplicando o produto notável '***quadrado da soma de dois termos***', temos:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\overbrace{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2}^{\text{5.ª Propriedade de Potência.}}+2\cdot\overbrace{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}^{\text{1.ª Propriedade de Potência.}}+\overbrace{\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2}^{\text{5.ª Propriedade de Potência.}}=a+2a^0+a^{-1}=a+a^{-1}+2$$

Como $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{100}{9}$ e $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+a^{-1}+2$, então

$a+a^{-1}+2=\frac{100}{9}$. Resolvendo a expressão, temos:

$$a+a^{-1}+2=\frac{100}{9}\Rightarrow a+a^{-1}+2-2=\frac{100}{9}-2\Rightarrow a+a^{-1}=\frac{100}{9}-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+a^{-1}=\frac{100-18}{9}\Rightarrow a+a^{-1}=\frac{82}{9}$$

Portanto, $a+a^{-1}=\frac{82}{9}$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **c.**

Exemplo 3 (FUVEST): Para $x=0{,}1$, o valor da expressão $\frac{x^3-1}{1-x}$ é:

a) $-11{,}1$ b) $-1{,}11$ c) $-0{,}111$ d) $1{,}11$ e) $11{,}1$

Resolução: Utilizando o 5.º caso de fatoração '***diferença de cubos***', podemos representar a referida expressão como $\frac{x^3-1}{1-x}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{1-x}$. Ao multiplicar o numerador e o denominador da expressão por (-1), temos:

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{1-x}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}=\frac{(1-x)\cdot(x^2+x+1)}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(-1)}=\frac{(x^2+x+1)}{(-1)}=-x^2-x-1$$

Como $x=0{,}1$, então:

$$-x^2-x-1=-(0{,}1)^2-0{,}1-1=-0{,}01-0{,}1-1=-1{,}11$$

Assim, $\frac{x^3-1}{1-x} = -1{,}11.$

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Definição: Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar todos os radicais (ou potências de expoente racional) que se encontram no denominador. No entanto, a fração resultante deve ser equivalente à inicial.

A racionalização de denominadores visa facilitar a obtenção do valor numérico de uma fração quando, em seu denominador, há radicais. Imagine o quão trabalhoso seria, por exemplo, calcular a razão $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$, cujo valor aproximado de $\sqrt[5]{3} \cong 1{,}24573093961\ldots$? Nesse sentido, foram desenvolvidas técnicas de racionalização, nas quais algumas delas serão esboçadas a seguir:

1.º Caso: Em frações com denominadores do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, para eliminar o radical é necessário multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. A este termo $\left(\sqrt[n]{a^{n-m}}\right)$ dá-se o nome de ***fator racionalizante***.

Ex.: a) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Note que $\sqrt{2}$ é o *fator racionalizante* do denominador $\sqrt{2}$.

$\sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2]{2^{2-1}} = \sqrt[2]{2^1}$

b) $\frac{4}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{4}{\sqrt[6]{3^4}} \cdot \left(\frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{3^2}}\right) = \frac{4\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{3^6}} = \frac{4\sqrt[6]{3^2}}{3}$

Observe que $\sqrt[6]{3^2}$ é o *fator racionalizante* do denominador $\sqrt[6]{3^4}$.

$\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2}$

2.º Caso: Em frações com denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, para eliminar o radical é necessário multiplicar o numerador e o denominador pelo seu ***conjugado***. Retomando o produto notável $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ (***produto da soma pela diferença de dois termos***), temos:

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}^{\text{Denominador.}}\cdot\overbrace{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}^{\text{Conjugado.}}=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\overbrace{a-b}^{\substack{\text{Elimina-se}\\ \text{o radical.}}}\\ \overbrace{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}^{\text{Denominador.}}\cdot\overbrace{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}^{\text{Conjugado.}}=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\overbrace{a-b}^{\substack{\text{Elimina-se}\\ \text{o radical.}}}\end{array}\right\}$$

Logo, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ é o *conjugado* de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é o *conjugado* de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Ex.: a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Note que $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ é o ***conjugado*** de $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$, sendo esse o denominador da fração.

b)

$$\frac{4}{\sqrt{6}+2}=\frac{4}{\sqrt{6}+2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2}\right)=\frac{4\left(\sqrt{6}-2\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-(2)^2}=\frac{4\left(\sqrt{6}-2\right)}{6-4}=\frac{4\left(\sqrt{6}-2\right)}{2}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

Veja que $\left(\sqrt{6}-2\right)$ é o ***conjugado*** de $\left(\sqrt{6}+2\right)$, sendo esse o denominador da fração.

Observação: Para a racionalização de denominadores do tipo $a\pm\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}\pm b$, multiplica-se o numerador e o denominador pelo seu ***conjugado***.

3.º Caso: Em frações com denominadores do tipo $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, para eliminar o radical, inicialmente, realiza-se a multiplicação do numerador e do denominador pelo seu ***conjugado***. Após essa racionalização, podem ser observadas duas situações, exemplificadas adiante:

1.ª) O radical é eliminado do denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}}=$$

$$= \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{(3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{9-5}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$$

2.ª) Para a eliminação do radical, aplica-se o 1.º caso de racionalização:

$$\frac{2}{\sqrt{4+\sqrt{6}}} = \frac{2}{\sqrt{4+\sqrt{6}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{6}}}{\sqrt{4-\sqrt{6}}}\right) = \frac{2\sqrt{4-\sqrt{6}}}{\sqrt{\left(4+\sqrt{6}\right)\cdot\left(4-\sqrt{6}\right)}} = \frac{2\sqrt{4-\sqrt{6}}}{\sqrt{(4)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{4-\sqrt{6}}}{\sqrt{16-6}} = \frac{2\sqrt{4-\sqrt{6}}}{\sqrt{10}}$$

Aplicando o 1.º caso:

$$\frac{2\sqrt{4-\sqrt{6}}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{\left(4-\sqrt{6}\right)\cdot 10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{2\sqrt{40-10\sqrt{6}}}{10} = \frac{\sqrt{40-10\sqrt{6}}}{5}$$

A seguir constam dois problemas matemáticos nos quais são empregados conhecimentos relativos à racionalização de denominadores, além de outros já estudados anteriormente para as suas resoluções:

Exemplo 1: A expressão $\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{8-4\sqrt{3}}$ é equivalente a:

a) -1 b) $1-\sqrt{3}$ c) 0 d) 1 e) $1+\sqrt{3}$

Resolução: Inicialmente, faz-se a racionalização do denominador $\left(8-4\sqrt{3}\right)$multiplicando o numerador e o denominador pelo seu ***conjugado*** $\left(8+4\sqrt{3}\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(8-4\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(8+4\sqrt{3}\right)}{\left(8+4\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(8+4\sqrt{3}\right)}{8^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(8+4\sqrt{3}\right)}{64-48} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(8+4\sqrt{3}\right)}{16}$$

Em seguida, desenvolve-se o produto notável $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$, cujo resultado é multiplicado por $\left(8+4\sqrt{3}\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)}{16}=\frac{\left(6-\overbrace{2\sqrt{12}}^{2\cdot2\sqrt{3}}+2\right)\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)}{16}=\frac{\overbrace{\left(8-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)}^{\text{Produto da soma pela diferença.}}}{16}=$$

$$=\frac{8^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}{16}$$

Por último, calcula-se o resultado final:

$$\frac{8^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}{16}=\frac{64-4^2\sqrt{3^2}}{16}=\frac{64-16\cdot3}{16}=\frac{64-48}{16}=\frac{16}{16}=1$$

Logo, a expressão $\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{8-4\sqrt{3}}$ equivale a 1.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

Exemplo 2 (EPCAr): Depois de racionalizar e efetuar os cálculos em $\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-2\sqrt{10}$, obtém-se como resultado:

a) 7 b) $7-2\sqrt{10}$ c) $\sqrt{7}-2\sqrt{10}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-2\sqrt{10}$ e) $\sqrt{5}-\sqrt{2}-2\sqrt{10}$

Resolução: Inicialmente, utiliza-se o 2.º caso de racionalização para eliminar os radicais do denominador da fração $\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$:

$$\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\left[\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{10}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{3\left(5+2\sqrt{10}+2\right)}{\underbrace{5-2}_{3}}=7+2\sqrt{10}$$

Em seguida, efetua-se a subtração: $7+2\sqrt{10}-2\sqrt{10}=7$.

Assim, o resultado da resolução da expressão $\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-2\sqrt{10}$ é 7.

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

EQUAÇÃO DO 1.º GRAU

Definição: Sejam a e b números reais, com $a\neq 0$. Denomina-se ***equação do 1.º grau*** em $\mathbb{R}$, na incógnita x, toda equação que pode ser escrita da seguinte forma:

$$ax+b=0$$

Para resolver equações do 1.º grau de modo a obter a ***raiz da equação*** que satisfaça a igualdade, realizam-se operações elementares em ambos os membros da igualdade de modo a obterem-se equações equivalentes. Observe:

Consideremos a forma geral $ax+b=0$.
Subtrai-se b de ambos os membros da igualdade: $ax+b-b=0-b$.
Obtém-se a equação equivalente: $ax=-b$.
Dividem-se ambos os membros da igualdade por a: $\frac{ax}{a}=\frac{-b}{a}$.
Obtém-se outra equação equivalente e, conjuntamente, a solução da equação: $x=-\frac{b}{a}$.
A notação $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ indica a solução ou a raiz da equação.

No exemplo seguinte é obtida a raiz da equação do 1.º grau:

Ex.: $5x+20=0$

$5x+20-20=0-20$ (Subtrai - se 20 de ambos os membro da igualdade.)
$5x=-20$
$\frac{5x}{5}=\frac{-20}{5}$ (Dividem - se ambos os membros da igualdade por 5.)

$$x = -4 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{A solução} -4 \text{ satisfaz a igualdade da equação inicial :} \\ 5\cdot(-4)+20=0 \Rightarrow -20+20=0 \Rightarrow 0=0\end{array}\right)$$

$$S=\{-4\}$$

Utilizando a resolução de equações do 1.º grau é possível solucionar inúmeros problemas matemáticos. A seguir constam dois exemplos:

Exemplo 1: A soma das idades de três irmãs é 50. Sabe-se que a irmã 'do meio' excede a idade da mais nova em 15 anos. Já a irmã mais velha excede a idade da irmã 'do meio' em 5 anos. Quais são as idades das três irmãs?

Resolução: Inicialmente, consideremos as incógnitas x, y e z como representando as idades das irmãs caçula, 'do meio' e mais velha, respectivamente. Assim, temos:

$x =$ idade da irmã caçula	$y =$ idade da irmã 'do meio'	$z =$ idade da irmã mais velha

Considerando os dados do problema, é possível representar as idades das irmãs a partir da ***incógnita*** x:

$y = x+15$ (A idade da irmã "do meio" excede a idade da irmã caçula em 15 anos.)

$z = y+5$ (A idade da irmã mais velha excede a idade da irmã "do meio" em 5 anos.)

Como $y = x+15$, então $z = x+15+5 \Rightarrow z = x+20$.

Sabendo que a soma das idades das três irmãs é 50, temos:

$$x+y+z=50 \Rightarrow x+(x+15)+(x+20)=50 \Rightarrow 3x+35=50 \Rightarrow$$

$$3x+35-35=50-35 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{15}{3} \Rightarrow x=5$$

Assim, as idades das irmãs são: $x=5$; $y=5+15=20$ e $z=5+20=25$.

Resposta: A irmã caçula possui 5 anos, a "do meio" 20 anos e a mais velha possui 25 anos.

Exemplo 2 (ENEM – 2009): Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais.

Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00 b) R$ 17,00 c) R$ 22,00 d) R$ 32,00 e) R$ 57,00

Resolução: Sabe-se que 50 pessoas já haviam pagado sua parte da despesa total, assim não será considerado o valor total para elas, apenas o valor adicional de R$ 7,00 que será multiplicado por 50. Além desse valor, para totalizar o restante que falta para a organização da festa (R$ 510,00), contribuíram 5 pessoas com um determinado valor. Como não sabemos esse referido valor, o denominaremos de y (considerado a incógnita da equação). Desse modo, faz-se possível elaborar a seguinte equação do 1.º grau:

$$\overbrace{5y}^{\text{o valor pago pelas 5 pessoas}} + \overbrace{(50\cdot 7)}^{\text{o valor pago pelas 50 pessoas que já haviam contribuído inicialmente}} = \overbrace{510}^{\text{o valor que faltava}}$$

$$5y + 350 = 510 \Rightarrow 5y + 350 - 350 = 510 - 350 \Rightarrow 5y = 160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5y}{5} = \frac{160}{5} \Rightarrow y = 32$$

Assim, para organizar a festa cada um pagou o valor total de R$ 32,00.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

Definição: Sejam a, b e c números reais, com $a \neq 0$. Denomina-se ***equação do 2.º grau*** em $\mathbb{R}$, na incógnita x, toda equação que pode ser escrita da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver equações do 2.º grau de modo a obter a ***raiz*** (ou as ***raízes***), caso exista(m) em , pode ser utilizada a fórmula de Bháskara. Observe:

Consideremos a forma geral $ax^2+bx+c=0$.

Inicialmente, obtém-se o *discriminante* (Δ) por meio do cálculo $\Delta=b^2-4ac$.

Em seguida, determina-se a raiz (ou as raízes), caso exista(m) em , a partir do seguinte cálculo:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_1 \text{ e } x_2 \text{ são as raízes da equação.}$$

A notação $S=\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ indica a solução da equação.

Nos exemplos seguintes são obtidas a raízes da equação do 2.º grau, caso existam em , utilizando a fórmula de Bháskara:

Ex.: a) $10x^2-7x+1=0\quad(a=10, b=-7, c=1)$

Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta=(-7)^2-4\cdot10\cdot1=49-40=9$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2\cdot10}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{7+3}{20}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}\\ x_2=\dfrac{7-3}{20}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\text{ e }\frac{1}{5}\text{ são as raízes da equação.}$$

Assim: $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{5}\right\}$.

b) $\dfrac{y^2}{2}-10x+50=0\quad\left(a=\dfrac{1}{2},\ b=-10,\ c=50\right)$

Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta=(-10)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot50=100-100=0$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{0}}{2\cdot\frac{1}{2}}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{10+0}{1}=10\\ x_2=\dfrac{10-0}{1}=10\end{cases}\Rightarrow 10 \text{ é a raiz da equação.}$$

Assim: $S=\{10\}$.

c) $2z^2-z+3=0\quad (a=2,\ b=-1,\ c=3)$

Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 3=1-24=-23$$

Como não existe raiz quadrada de um número negativo em , então não é possível prosseguir com o cálculo para obter a raiz da referida equação.

Assim: $S=\emptyset\ (\text{conjunto vazio})$.

De modo geral, em uma equação do 2.º grau, pode-se afirmar que:

a) Para $(\Delta)>0$ há duas raízes reais distintas. b) Para $(\Delta)=0$ há duas raízes reais iguais. c) Para $(\Delta)<0$ não há raiz real.

Quando a equação do 2.º grau está ***incompleta***, ou seja, b e c são iguais a zero (simultaneamente, ou não), é possível obter as raízes da equação por outras formas, sem a necessidade da utilização da fórmula de Bháskara. Observe os casos seguintes:

1.º Caso: Para $c=0$ e $b\neq 0$, utiliza-se o 1.º caso de fatoração para resolver a equação:

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow ax^2+bx=0\Rightarrow \overset{\text{fator comum}}{\overbrace{x}}\cdot(ax+b)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ ax+b=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}\end{cases}$$

Assim, as raízes da equação são $x=0$ ou $x=-\dfrac{b}{a}$.

Ex.: $2x^2-5x=0 \Rightarrow x\cdot(2x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Logo: $S=\left\{0;\dfrac{5}{2}\right\}$.

2.º Caso: Para $b=0$ e $c\neq 0$, isola-se a incógnita e extrai-se a raiz quadrada, caso exista em :

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Assim, as raízes da equação são $x=+\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ e $x=-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Ex.:
$$4x^2-32=0 \Rightarrow 4x^2=32 \Rightarrow x^2=\frac{32}{4} \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=+\sqrt{8} \Rightarrow x=\sqrt{2^3} \Rightarrow x=2\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{8} \Rightarrow x=-\sqrt{2^3} \Rightarrow x=-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Portanto: $S=\left\{2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right\}$.

3.º Caso: Para $b=0$ e $c=0$, extrai-se a raiz quadrada de zero:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

Assim, a raiz da equação é $x=0$.

Desse modo: $S=\{0\}$.

Utilizando os diferentes modos de resolução de equações do 2.º grau é possível solucionar inúmeros problemas matemáticos. A seguir constam dois exemplos:

Exemplo 1: O quadrado do número de filhos de Miguel é igual a 8 menos 2 vezes o número de filhos. Quantos filhos Miguel têm?

Resolução: Consideremos y como sendo o número de filhos de Miguel. A partir do enunciado, temos que:

$$\overbrace{y^2}^{\text{o quadrado do número de filhos}} = 8 - \overbrace{2y}^{\text{2 vezes o número de filhos}} \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{8 menos 2 vezes o número de filhos}}$$

Escrevendo a equação em sua forma geral, obtemos: $y^2 + 2y - 8 = 0$. Para obter as raízes da equação utiliza-se a fórmula de Bháskara:

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \quad (a = 1, b = 2, c = -8)$$

Primeiro, calcula-se o discriminante: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_2 = \dfrac{-2-6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ e } -4 \text{ são as raízes da equação.}$$

Como o número de filhos é sempre um número natural, então, despreza-se a raiz negativa encontrada (-8). Logo, o número de filhos de Miguel é 2.

Resposta: Miguel possui 2 filhos.

Exemplo 2 (ENEM – 2013): A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t) = \dfrac{-t^2}{4} + 400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39º C. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0 b) 19,8 c) 20,0 d) 38,0 e) 39,0

Resolução: Conforme o enunciado, temos a equação $T(t)=\frac{-t^2}{4}+400$. Sabe-se que o forno só poderá ser aberto quando $T=39$. Substituindo tal valor na equação, temos:

$$39=\frac{-t^2}{4}+400$$

Multiplicando ambos os membros da equação por 4, obtemos a seguinte equação equivalente:

$$156=-t^2+1600 \Rightarrow 156-1600=-t^2 \Rightarrow -1444=-t^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação por (-1), temos:

$$1444=t^2 \overset{\text{extrai-se a raiz quadrada de ambos os membros}}{\Rightarrow} \sqrt{t^2}=\pm\sqrt{1444} \Rightarrow t=\pm 38$$

Como o tempo é sempre um número positivo, então, despreza-se a raiz negativa encontrada (-38). Logo, o tempo mínimo de espera para abrir o forno é de 38 minutos.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

SOMA E PRODUTO DE RAÍZES

Sejam x_1 e x_2 as raízes de uma equação do 2.º grau $(ax^2+bx+c,\ a\neq 0)$ obtidas a partir da fórmula resolutiva de Bháskara. Desse modo, temos:

Soma de raízes: $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.

Efetuando a soma das raízes $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, temos:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

Produto de raízes: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Efetuando o produto das raízes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, temos:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{\overbrace{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}^{\text{Diferença de Quadrados.}}}{(2a)^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} =$$

$$\frac{b^2 - \overbrace{\left(b^2-4ac\right)}^{\Delta}}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Utilizando tal conhecimento acerca da soma e produto de raízes, observe a resolução de dois problemas matemáticos:

Exemplo 1 (FUVEST): Se m e n são raízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, então $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ vale:

a) 6 b) 2 c) 1 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

Resolução: Inicialmente, adicionam-se as frações que compõem a expressão $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, ficando $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{n+m}{\underbrace{m \cdot n}_{\text{mmc}\,(m,n)=m\cdot n}} = \frac{m+n}{m \cdot n}$.

Sabe-se que m e n são as raízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, cujos coeficientes são: $a = 1$, $b = -6$ e $c = 10$.

Ao observar o numerador e o denominador da fração $\left(\frac{m+n}{m \cdot n}\right)$ nota-se que os mesmos equivalem, respectivamente, a ***soma*** e ao ***produto*** das raízes m e n. Como $m + n = S = -\frac{b}{a}$ e $m \cdot n = P = \frac{c}{a}$ então, $S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{1} = 6$ e $P = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$. Substituindo tais valores na referida fração, temos:

$$\left(\frac{m+n}{m\cdot n}\right)=\frac{S}{P}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Assim, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{5}$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

Exemplo 2 (PUCCAMP): Se v e w são raízes da equação $x^2+ax+b=0$, onde a e b são coeficientes reais, então v^2+w^2 é igual a:

a) a^2-2b b) a^2+2b c) a^2-2b^2 d) a^2+2b^2 e) a^2-b^2

Resolução: Sabendo que v e w são raízes da equação $x^2+ax+b=0$, conforme a ***soma e produto de raízes,*** temos que $S=v+w=-\frac{b}{a}$ e $P=v.w=\frac{c}{a}$. Assim:

$$v+w=-\frac{b}{a}\Rightarrow v+w=-\frac{a}{1}\Rightarrow v+w=-a \qquad \text{(1.ª equação)}$$

$$v.w=\frac{c}{a}\Rightarrow v.w=\frac{b}{1}\Rightarrow v.w=b \qquad \text{(2.ª equação)}$$

Na 1.ª equação, eleva-se ao quadrado ambos os membros da igualdade:

$$\overbrace{(v+w)^2}^{\substack{\text{Quadrado da}\\ \text{soma de}\\ \text{dois termos.}}}=(-a)^2\Rightarrow v^2+2\cdot v\cdot w+w^2=a^2$$

Como $v.w=b$ (2.ª equação), então: $v^2+2\cdot\overbrace{v\cdot w}^{b}+w^2=a^2\Rightarrow v^2+2b+w^2=a^2$. Somando-se $(-2b)$ a ambos os membros da igualdade, obtemos o resultado pretendido:

$$v^2+2b+w^2=a^2\Rightarrow v^2+2b+w^2+(-2b)=a^2+(-2b)\Rightarrow v^2+w^2=a^2-2b$$

Portanto, $v^2+w^2=a^2-2b$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

EQUAÇÃO IRRACIONAL

Definição: ***Equação irracional*** é toda equação cuja incógnita apresenta-se sob um ou mais radicais. Observe alguns exemplos de equações irracionais:

a) $\sqrt{x+5}=8$ ⋮ b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}}=1$ ⋮ c) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$

Para resolver equações deste tipo é necessário elevar as equações às potências convenientes de modo a eliminar o(s) radical(is). Após determinar as raízes da equação obtida (mediante tal transformação), deve-se verificar se as mesmas podem ou não ser aceitas como raízes da equação irracional inicial. A seguir constam as resoluções dos exemplos anteriores:

Ex.: a) $\sqrt{x+5}=8$

$$\overbrace{\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(8)^2}^{\text{Elevam-se, ao quadrado, ambos os membros.}} \Rightarrow x+5=64 \Rightarrow \overbrace{x+5-5=64-5}^{\text{Subtrai-se 5 de ambos os membros.}} \Rightarrow x=59$$

Verificando se a raiz encontrada $(x=59)$ satisfaz a equação irracional inicial:

$$\sqrt{x+5}=8 \Rightarrow \sqrt{59+5}=8 \Rightarrow \sqrt{64}=8 \Rightarrow 8=8$$

Como a sentença é verdadeira, então $(x=59)$ é raiz da equação irracional $\sqrt{x+5}=8$.

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}}=1$

$$\overbrace{\left[\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}}\right]^3=(1)^3}^{\text{Elevam-se, ao cubo, ambos os membros.}} \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=1 \Rightarrow \overbrace{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=(1)^2}^{\text{Elevam-se, ao quadrado, ambos os membros.}} \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{x^2-1+1=1+1}^{\text{Soma-se 1 a ambos os membros.}} \quad \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Verificando se as raízes encontradas $\left(x=\pm\sqrt{2}\right)$ satisfazem a equação irracional inicial:

Para $x=\sqrt{2}$:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{2-1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{1}=1\Rightarrow 1=1$$

Para $x=-\sqrt{2}$:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2-1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{2-1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{1}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{1}=1\Rightarrow 1=1$$

Como ambas as sentenças são verdadeiras, então $\left(x=\pm\sqrt{2}\right)$ são raízes da equação irracional $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}}=1$.

c) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}\Rightarrow\overbrace{\underbrace{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)^2}_{\text{Quadrado da diferença de dois termos.}}=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2}^{\text{Elevam-se, ao quadrado, ambos os membros.}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\cdot\left(\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{x-1}\right)^2=2x-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+2\sqrt{(x+2)\cdot(x-1)}+x-1=2x-3\Rightarrow 2x+1+2\sqrt{x^2+x-2}=2x-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+x-2}=-4\Rightarrow\overbrace{\left(2\sqrt{x^2+x-2}\right)^2=(-4)^2}^{\text{Elevam-se, ao quadrado, ambos os membros.}}\Rightarrow 4\left(x^2+x-2\right)=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=\frac{16}{4}\Rightarrow x^2+x-2=4\Rightarrow x^2+x-6=0$$

Resolvendo a equação do 2.º grau por meio da fórmula de Bháskara temos:

$$x^2+x-6=0\quad(a=1;\ b=1;\ c=-6)$$

Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta=(1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x=\frac{-(1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\ x_2=\dfrac{-1-5}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}\Rightarrow 2\text{ e }-3\text{ são as raízes da equação.}$$

Verificando se as raízes encontradas $(x=2)$ e $(x=-3)$ satisfazem a equação irracional inicial:

Para $x=2$: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3} \Rightarrow \sqrt{2+2}-\sqrt{2-1}=\sqrt{2\cdot 2-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{1}=\sqrt{1} \Rightarrow 2-1=1 \Rightarrow 1=1$

Para $x=-3$:

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3} \Rightarrow \sqrt{-3+2}-\sqrt{-3-1}=\sqrt{2\cdot(-3)-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{-1}-\sqrt{-4}=\sqrt{-9}$

Como não existe raiz quadrada para valores negativos em , então, a raiz $x=-3$ não satisfaz a equação irracional inicial.

Assim, $(x=2)$ é a única raiz da equação irracional $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$.

A seguir constam dois problemas matemáticos nos quais são empregados conhecimentos relativos à resolução de equações irracionais, além de outros já estudados anteriormente:

Exemplo 1 (MACKENZIE): Se o número x é solução da equação $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$, então x^2 está entre:

a) 0 e 25 b) 25 e 55 c) 55 e 75 d) 75 e 95 e) 95 e 105

Resolução: Inicialmente, elevam-se, ao cubo, ambos os membros da equação. Em seguida, realizam-se algumas operações envolvendo os assuntos já abordados (potenciação, radiciação, fatoração/produtos notáveis, etc.). Observe:

$$\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3 \Rightarrow \overbrace{\left(\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}\right)^3}^{\text{Cubo da diferença de dois termos.}}=(3)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+9}\right)^3-3\cdot\left(\sqrt[3]{x+9}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{x-9}\right)+3\cdot\left(\sqrt[3]{x+9}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^3=27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+9-3\sqrt[3]{(x+9)^2\cdot(x-9)}+3\sqrt[3]{(x+9)\cdot(x-9)^2}-(x-9)=27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+9-3\sqrt[3]{(x+9)\cdot\underbrace{(x+9)\cdot(x-9)}_{\text{Produto da soma pela diferença de dois termos.}}}+3\sqrt[3]{\underbrace{(x+9)\cdot(x-9)}_{\text{Produto da soma pela diferença de dois termos.}}\cdot(x-9)}-x+9=27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\sqrt[3]{(x+9)\cdot(x^2-81)}+3\sqrt[3]{(x^2-81)\cdot(x-9)}+18=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{-3\sqrt[3]{(x+9)}\cdot\sqrt[3]{(x^2-81)}+3\sqrt[3]{(x^2-81)}\cdot\sqrt[3]{(x-9)}}_{\text{Fatoração - Fator Comum: }-3\sqrt[3]{(x^2-81)}}=27-18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\sqrt[3]{(x^2-81)}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{(x+9)}-\sqrt[3]{(x-9)}\right)}_{\substack{\text{Conforme o enunciado, tal}\\ \text{expressão é igual a 3.}}}=9\Rightarrow -3\sqrt[3]{(x^2-81)}\cdot(3)=9\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{(x^2-81)}=\frac{9}{-9}\Rightarrow\sqrt[3]{(x^2-81)}=-1$$

Como ainda há uma equação irracional, elevam-se, novamente, ambos os membros da equação ao cubo:

$$\sqrt[3]{(x^2-81)}=-1\Rightarrow\left(\sqrt[3]{(x^2-81)}\right)^3=(-1)^3\Rightarrow x^2-81=-1\Rightarrow x^2=80$$

Logo, como $x^2=80$, então x^2 está entre 75 e 95. Note que, neste caso, não houve a necessidade de verificar se a raiz encontrada satisfaz a equação irracional inicial, pois o enunciado afirma que x é solução da equação.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

Exemplo 2 (IME-2001/2002): Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$, sabendo-se que $x>0$.

Resolução: Para a resolução da equação irracional, inicialmente, faz-se uma mudança de variável, definindo $y=\sqrt{5-x}$. Assim, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} y=\sqrt{5-x} & (1.^{\text{a}}\ \text{equação})\\ x=\sqrt{5-y} & (2.^{\text{a}}\ \text{equação})\end{cases}$$

Note que a 2.ª equação adveio da substituição de $y=\sqrt{5-x}$ na equação irracional inicial.

Para eliminar o radical da 1.ª e 2ª equações, elevam-se, ao quadrado, ambos os membros de cada igualdade:

$$\begin{cases} y=\sqrt{5-x}\\ x=\sqrt{5-y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (y)^2=\left(\sqrt{5-x}\right)^2\\ (x)^2=\left(\sqrt{5-y}\right)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y^2=5-x & (3.^{\text{a}}\ \text{equação})\\ x^2=5-y & (4.^{\text{a}}\ \text{equação})\end{cases}$$

Subtraindo a 3.ª equação da 4.ª equação, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} y^2 = 5 - x \\ x^2 = 5 - y \end{cases} \\ \hline y^2 - x^2 = -x - (-y) \end{array} \quad \Rightarrow \underbrace{y^2 - x^2}_{\text{Diferença de quadrados.}} = y - x \Rightarrow \overbrace{(y+x)\cdot(y-x)}^{\text{Produto da soma pela diferença.}} = (y-x)$$

Para satisfazer a igualdade da equação $(y+x)\cdot(y-x)=(y-x)$, há duas possibilidades:

1.ª) Supõe-se $y-x=0$, pois: $(y+x)\cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Se $y-x=0$, então $y=x$. Fazendo tal substituição na 3.ª equação, temos:

$$y^2 = 5 - x \Rightarrow x^2 = 5 - x \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0$$

Resolvendo a equação do 2.º grau obtida por meio da fórmula de Bháskara, obtemos as seguintes raízes:

$$\Delta = (1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 1 + 20 = 21$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{21}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{ e } \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \text{ são as raízes.}$$

2.ª) Supõe-se $y+x=1$, pois: $1\cdot(y-x)=(y-x) \Rightarrow (y-x)=(y-x)$.

Se $y+x=1$, então $y=1-x$. Fazendo tal substituição na 3.ª equação, temos:

$$y^2 = 5 - x \Rightarrow (1-x)^2 = 5 - x \Rightarrow 1 - 2x + x^2 = 5 - x \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

Resolvendo a equação do 2.º grau obtida por meio da fórmula de Bháskara, obtemos as seguintes raízes:

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 1 + 16 = 17$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ e } \frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ são as raízes da equação.}$$

Como $x > 0$ (conforme o enunciado), então, as raízes negativas obtidas $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \text{ e } \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$ devem ser eliminadas da solução. Além disso, $x < \sqrt{5}$, pois, caso contrário, não é possível a igualdade da equação irracional inicial. Logo, a única solução é $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Resposta: A solução da equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}} = x$ é $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

2 NÚMEROS

Desde a antiguidade, o homem precisou aprender a contar para resolver diversos problemas provenientes de seu cotidiano. Dessa forma, diferentes conjuntos numéricos foram, gradativamente, sendo elaborados em suas mais diversas representações. A seguir serão abordados os seguintes conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS (ℕ)

O conjunto dos Números Naturais é constituído por:

$$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$$

Podem-se representar os naturais não-nulos, ou seja, excluindo-se o zero, colocando um asterisco em sua representação (isso ocorrerá para os demais conjuntos apresentados), ficando $\mathbb{N}^* = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$.

Há que se destacar os números primos, de suma importância na Matemática e nas Ciências, como, por exemplo, na criptografia em Computação. São números primos os números naturais (maiores que 1) que possuem, exatamente, 2 divisores naturais, sendo ele próprio e o número 1, considerado o divisor universal. **Divisores de um número natural** são todos os números naturais que, ao dividirem tal número, resulta em uma divisão exata, ou seja, com resto igual a zero. Os primos naturais são: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ... . A lista é interminável e não apresenta um padrão ou lei de formação, o que intriga matemáticos ao redor do mundo.

Pelo **Teorema Fundamental da Aritmética**, todo número natural, maior do que 1, ou é primo ou pode ser decomposto em um produto de fatores primos, sendo único, exceto pela permutação desses fatores. A esse respeito, observe o exemplo seguinte:

Ex.: Decomponha o número 60 em fatores primos.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Resposta: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Os livros didáticos trazem o processo de decomposição com os fatores primos dispostos em ordem crescente, o que não é necessário. Na verdade, o mesmo processo poderia ser esboçado como segue:

60	3
20	2
10	5
2	2
1	

Quanto maior for o primeiro fator primo colocado, menos complexos serão os cálculos seguintes. Um número que elucida bem esse ponto é o 350. A seguir, esboça-se à esquerda o método tradicional e, à direita, a decomposição iniciando-se com o fator 7.

350	2
175	5
35	5
7	7
1	

350	7
50	2
25	5
5	5
1	

As duas decomposições resultam em um mesmo produto, mas os cálculos do processo à direita se mostram mais simples.

Em relação à obtenção dos divisores de um número natural, utiliza-se um processo que pode ser considerado uma "continuação" da decomposição em fatores primos. Inicia-se o algoritmo, como já denotado anteriormente, mas se adiciona uma segunda barra vertical, iniciada pelo número 1, divisor universal. Em seguida, deve-se realizar uma "distributiva" entre os fatores primos e os divisores que vão surgindo. Vejamos o exemplo.

Ex.: Determine os divisores naturais de 60.

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3; 6; 12
5	5	5; 10; 20; 15; 30; 60
1		

Resposta: $\text{Divisores}(60) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 10;\ 12;\ 15;\ 20;\ 30;\ 60\}$

E se desejarmos, porém, apenas o número de divisores naturais, sem a necessidade de especificá-los um a um? Nesse caso, basta decompô-lo, somar uma unidade a cada expoente dos fatores primos e multiplicar cada resultado. Esse valor expressa o total de divisores naturais. Consideremos este mesmo exemplo:

Ex.: Quantos são os divisores naturais de 60?

Como já denotado, $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. Tomando os expoentes e somando o número um a cada um deles, temos:

$$(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 3\cdot 2\cdot 2 = 12$$

Resposta: O número 60 possui 12 divisores naturais.

Para auxiliar nesses processos, faz-se necessário estudar alguns critérios de divisibilidade, descritos a seguir:

Por 2: O algarismo das unidades deve ser par (0; 2; 4; 6 ou 8).

Por 3: A soma dos algarismos deve ser múltipla de 3.

Por 4: Os dois últimos algarismos devem formar um múltiplo de 4.

Por 5: O algarismo das unidades deve ser 5 ou 0.

Por 6: Deve ser divisível por 2 e 3, simultaneamente.

Por 9: A soma dos algarismos deve ser múltipla de 9.

Por 10: O algarismo das unidades deve ser 0.

Por 11: Some os algarismos em posição ímpar e também os algarismos em posição par. Se a diferença entre esses dois valores resultarem em um múltiplo de 11, o número original é múltiplo de 11.

Para exemplificar, estudemos a divisibilidade do número 35667180 por todos os critérios denotados anteriormente:

Por 2: Sim, pois o algarismo das unidades é par.

Por 3: Sim. A soma dos algarismos é múltipla de 3 $(3+5+6+6+7+1+8+0=36)$.

Por 4: Sim. Os dois últimos algarismos formam o número 80, que é múltiplo de 4.

Por 5: Sim, pois o algarismo das unidades é 0.

Por 6: Sim, pois é divisível por 2 e 3 simultaneamente.

Por 9: Sim, pois a soma dos algarismos é 36, que é múltiplo de 9.

Por 10: Sim, pois o algarismo das unidades é 0.

Por 11: Não. A soma dos algarismos em posição ímpar é $3+6+7+8=24$, e os de posição par é $5+6+1+0=12$. Sua diferença é $24-12=12$, que não é múltiplo de 11.

Outro conceito importante é o de **Máximo Divisor Comum** (**mdc**) entre dois ou mais números naturais. Existem vários procedimentos para obtê-lo, no entanto, utilizaremos o método da decomposição em fatores primos. Observe o exemplo seguinte:

Ex.: Determine o mdc entre 60 e 72.

Inicialmente, decompõem-se cada um dos números (60 e 72) em fatores primos:

60	**2**
30	**2**
15	**3**
5	5
1	

72	**2**
36	**2**
18	2
9	**3**
3	3
1	

Note que, em negrito, destacam-se os fatores comuns obtidos da decomposição dos números 60 e 72. Para obter o mdc entre esses números, basta multiplicar tais fatores comuns, ou seja, $2^2 \cdot 3 = 12$.

Resposta: Assim, mdc (60,72) = 12.

Quando se estudam os números naturais, também é introduzido o conceito da tabuada, que nada mais é do que a sequência infinita de múltiplos de um determinado número inteiro. **Múltiplo de um número natural** é todo o número obtido através da multiplicação deste número por um número natural qualquer. Por exemplo, 0, 3, 6, 9 são múltiplos do número 3. Para determinar o **Mínimo Múltiplo Comum** (**mmc**) entre dois ou mais números naturais é possível utilizar o algoritmo de fatoração simultânea, como segue no exemplo.

Ex.: Determine o mmc entre 60 e 72.

60, 72	2
30, 36	2
15, 18	2
15, 9	3
5, 3	3
5, 1	5
1, 1	

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Observe que o mmc é obtido a partir da multiplicação dos fatores primos provenientes da decomposição simultânea dos números 60 e 72.

Resposta: Assim, mmc (60,72) = 360.

Cabe destacar que os fatores primos não precisam ser dispostos em ordem crescente, como já estudamos na decomposição em fatores primos. No exemplo seguinte denota-se um problema no qual o conceito de mmc foi utilizado na resolução:

Exemplo (UNICAMP – 2015): A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

Alimento	A	B
Quantidade	20 g	20 g
Valor Energético	60 kcal	80 kcal
Sódio	10 mg	20 mg
Proteína	6 g	1 g

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre a quantidade de proteína em A e a quantidade de proteína em B é igual a

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

Resolução: Para igualar o valor energético dos dois alimentos, é necessário determinar o mmc entre 60 e 80. Para tal, não é obrigatório usar fatores primos. É permitido utilizar um número composto, desde que seja divisor de ambos os números.

60, 80	20
3, 4	2
3, 2	2
3, 1	3
1, 1	

$$20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 240$$

Como o mmc é 240 kcal, devemos multiplicar os valores nutricionais do alimento A por 4 (pois, $240 \div 60 = 4$) e os de B por 3 (pois, $240 \div 80 = 3$).

Assim, a massa de proteína em A será de $6\,\text{g} \cdot 4 = 24\,\text{g}$; já a de B será $1\,\text{g} \cdot 3 = 3\,\text{g}$. Efetuando-se a razão entre a quantidade de proteína em A e a quantidade de proteína em B obtém-se 8 como resultado $(24\,\text{g} \div 3\,\text{g} = 8)$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **c.**

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos Números Inteiros compreende o conjunto dos Números Naturais e seus opostos (simétricos). Por exemplo, o número -1 é simétrico de 1, e vice-versa.

Tal conjunto é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$$

Observe que este conjunto é constituído pelos números negativos que são importantes à própria Matemática, bem como às mais diversas áreas do conhecimento. Adicionando os sinais de adição ou subtração abaixo do símbolo , obtemos o conjunto dos números inteiros não-negativos e não-positivos, respectivamente. Observe:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\} = \mathbb{N} \qquad \mathbb{Z}_- = \{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0\}$$

Note que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, o que corrobora ao afirmado anteriormente sobre o conjunto dos Números Inteiros compreender o conjunto dos Números Naturais.

Para excluir-se o zero de $\mathbb{Z}$, adiciona-se o asterisco (*) acima do referido símbolo, ficando:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$$

Neste conjunto, são números primos os que apresentam, exatamente, 4 divisores inteiros, sendo ele próprio, o seu simétrico e os números 1 e -1. Por exemplo, o número -5 é primo, pois possui, exatamente, 4 divisores inteiros: 1, -1, 5 e -5.

Em relação aos divisores de um número inteiro, após determinar os divisores positivos, por meio do método apresentado no tópico anterior, é necessário acrescentar os seus respectivos simétricos (opostos). Neste sentido, observe a resolução dos exemplos abordados anteriormente:

Ex.: Determine os divisores inteiros de 60.

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3; 6; 12
5	5	5; 10; 20; 15; 30; 60
1		

Resposta: Como há que se considerar o número simétrico de cada um dos divisores obtidos, então, os divisores inteiros de 60 são:

$$\text{Divisores}(60) = \{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 5\ \pm 6;\ \pm 10;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 20;\ \pm 30;\ \pm 60\}$$

Ex.: Quantos são os divisores inteiros de 60?

Por meio da fatoração, sabe-se que $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. Considerando os expoentes e adicionando o número um a cada um deles, temos:

$$(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \text{ divisores positivos}$$

Devido à simetria existente no conjunto dos Números Inteiros, então, o número de divisores negativos do número 60 também é 12. Assim, o total de divisores inteiros deste número é 24.

Resposta: O número 60 possui 24 divisores inteiros.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

Esse conjunto contém todos os números que podem ser formados pela razão $\frac{a}{b}$, sendo $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Assim, além de abranger os dois conjuntos anteriores (Naturais e Inteiros), compreende também as frações irredutíveis e as dízimas periódicas. Fração irredutível é toda fração cuja simplificação não é possível, no qual o mdc entre o numerador e o denominador é 1. Por exemplo, $\frac{1}{5}$ é uma fração irredutível.

Já a dízima periódica é toda representação decimal, de um número racional, que possui um número infinito de ordens decimais. Nesta, há sempre uma parte que se repete, denominado **período** ou **parte periódica**. Já a parte que fica à direita da vírgula e não compõe o período, caso exista, recebe o nome de **anteperíodo** ou **parte não periódica**. Por exemplo, $0{,}3125125125\ldots$ é uma

dízima periódica na qual o período (ou parte periódica) é 125 e o anteperíodo (ou parte não periódica) é 3. Tal número pode ser também representado por $0,3\overline{125}$, cuja barra $\left(\overline{\ \ }\right)$ é colocada sobre o período. Em relação aos tipos de dízima periódica, observam-se:

1.º) **Dízima periódica simples**: recebem esta classificação as dízimas que não possuem anteperíodo (ou parte não periódica). Por exemplo, $0,154315431543\ldots$ e $45,1111\ldots$ são dízimas periódicas simples.

2.º **Dízima periódica composta**: recebem esta classificação as dízimas que possuem anteperíodo (ou parte não periódica). Por exemplo, $5,263333\ldots$ e $0,09823232323\ldots$ são dízimas periódicas compostas.

Para a obtenção da *fração geratriz*, ou seja, da fração que gera uma dízima periódica, há algumas dicas denotadas nos casos a seguir:

1.º Caso: Quando a dízima periódica simples possuir parte inteira nula, procede-se da seguinte maneira: No denominador da fração geratriz coloca-se o número 9, se o período possuir um algarismo; 99, se possuir dois algarismos; 999 se possuir três algarismos, e assim por diante. Já o numerador será o próprio período. Veja alguns exemplos:

Ex.: a) $0,\overline{7} = 0,77777\ldots = \dfrac{7}{9}$ Note que o período (7) possui apenas um algarismo.

b) $0,\overline{25} = 0,25252525\ldots = \dfrac{25}{99}$ Observe que o período (25) possui dois algarismos.

c) $0,\overline{451} = 0,451451451\ldots = \dfrac{451}{999}$ Veja que o período (451) possui três algarismos.

2.º Caso: Se houver *n* zeros antes do período, acrescentam-se *n* zeros nos últimos *n* algarismos do denominador. Observe dois exemplos:

Ex.: a) $0,000\overline{13} = 0,00013131313\ldots = \dfrac{13}{99000}$ Note que antes do período (13) há três zeros. Assim, após aplicar o 1.º Caso, acrescentam-se três zeros no denominador.

b) $0,0\overline{5} = 0,05555\ldots = \dfrac{5}{90}$ Veja que antes do período (5) há um zero. Logo, após aplicar o 1.º Caso, acrescenta-se um zero no denominador.

3.º Caso: Existem dízimas em que se pode decompor a parte periódica e a não-periódica. Após separá-las por meio de uma adição, aplica-se o 1.º e ou o 2º Caso para obter a fração geratriz da parte periódica. Observe o seguinte exemplo:

Ex.:

a) $1,3\overline{7} = 1,37777\ldots = \underbrace{\overbrace{1,3}^{\text{parte não-periódica}} + \overbrace{0,0777\ldots}^{\text{parte periódica}}}_{\text{Decompõe-se a dízima periódica.}} = \dfrac{13}{10} + \overbrace{\dfrac{7}{90}}^{\text{Aplica–se o 2.ºCaso.}} = \dfrac{117+7}{90} = \dfrac{124}{90} = \dfrac{62}{45}$

b) $4,\overline{6} = 4,6666\ldots = \underbrace{\overbrace{4}^{\text{parte não-periódica}} + \overbrace{0,666\ldots}^{\text{parte periódica}}}_{\text{Decompõe-se a dízima periódica.}} = 4 + \overbrace{\dfrac{6}{9}}^{\text{Aplica–se o 1.ºCaso.}} = \dfrac{36+6}{9} = \dfrac{42}{9} = \dfrac{14}{3}$

Observação: Para 'justificar' tais dicas, tomemos o exemplo a) do 1.º caso. Seja a dízima periódica $0,77777\ldots.$ Considera-se, inicialmente, $x = 0,77777\ldots.$ Multiplicam-se, ambos os membros da igualdade, por 10, ficando: $10x = 7,77777\ldots.$ Subtraindo-se esta última equação da primeira, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 7,77777\ldots \\ - \quad x & = & 0,77777\ldots \\ \hline 9x & = & 7 \\ x & = & \dfrac{7}{9} \end{array}$$

Para saber se a equação inicial deverá ser multiplicada por 10 (100, 1000, ou outra potência de 10) observa-se a quantidade de algarismos que compõe o período da dízima periódica. Por exemplo, supondo que o período possua 2 algarismos, a equação deverá ser multiplicada por 100.

De maneira análoga, é possível justificar as demais dicas denotadas no 2.º e 3.º casos.

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

O conjunto dos Números Irracionais é composto por números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Por exemplo, o valor aproximado de $\sqrt{2}$ é $1,41421356237309504880168872 42$. O mesmo ocorre com as

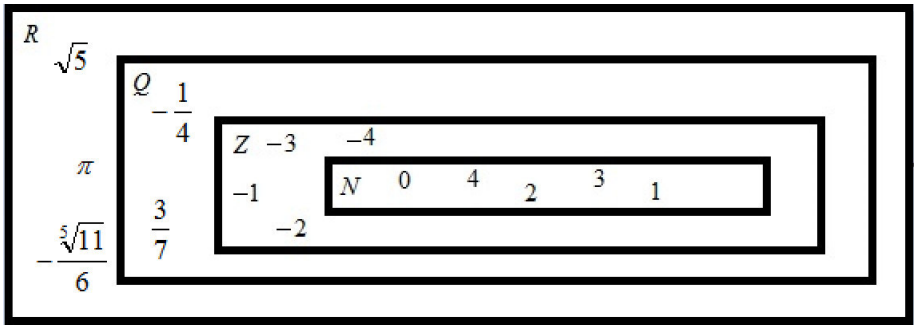
constantes "*pi*" $\pi = 3{,}141592653\ldots$, de Euler $e = 2{,}718281828459045\ldots$ e mais infinitos números.

Assim, definem-se, também, números irracionais como àqueles que não podem ser escritos na razão $\frac{a}{b}$, sendo $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS ($\mathbb{R}$)

O conjunto dos Números Reais engloba todos os conjuntos estudados anteriormente. Logo, tal conjunto é formado pela união do conjunto dos números racionais e dos irracionais.

A figura seguinte auxilia na visualização dos conjuntos numéricos abordados e as relações de inclusão entre eles:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\subset \rightarrow$ (Lê-se: está contido.)

Há ainda um conjunto numérico que contém o conjunto dos Números Reais. A esse conjunto dá-se o nome de conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$). O mesmo será abordado posteriormente.

RAZÕES E PROPORÇÕES

Numa viagem, quando aceleramos o carro, ou seja, aumentamos sua velocidade, diminuímos o tempo de percurso. Esse é um princípio básico da Cinemática, envolvendo três grandezas: espaço, tempo e velocidade. No exemplo, o espaço se mantém constante, enquanto a velocidade aumenta. Em decorrência desse incremento, o tempo de percurso diminui. Dizemos, então, que velocidade e

tempo são *grandezas inversamente proporcionais*. Ao contrário, se a velocidade fosse mantida, quanto mais tempo fosse decorrido, mais espaço seria percorrido. Dessa monta, observa-se que espaço e tempo são *grandezas diretamente proporcionais*. Ainda uma terceira situação pode ser verificada: numa determinada quantidade fixa de tempo, se aumentarmos a velocidade do carro, percorreremos mais espaço, ou seja, espaço e velocidade são *diretamente proporcionais*.

Matematicamente, se $(a;\ b;\ c)$ é ***diretamente proporcional*** a $(d;\ e;\ f)$, então:

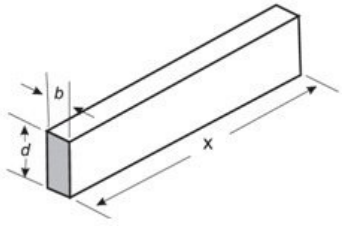
$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=\frac{a+b+c}{d+e+f}$$

Em contrapartida, se forem ***inversamente proporcionais***, tem-se que:

$$a\cdot d=b\cdot e=c\cdot f$$

Podem-se relacionar diversas grandezas entre si, desde que seja explicitada a relação de proporcionalidade entre elas. Observe a resolução dos exemplos a seguir:

Exemplo 1 (ENEM – 2012): A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade *k* é chamada de resistência da viga.



A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é

a) $S=\dfrac{k\cdot b\cdot d^2}{x^2}$ b) $S=\dfrac{k\cdot b\cdot d}{x^2}$ c) $S=\dfrac{k\cdot b\cdot d^2}{x}$ d) $S=\dfrac{k\cdot b^2\cdot d}{x}$ e) $S=\dfrac{k\cdot b^2\cdot 2d}{2x}$

Resolução: Sendo S diretamente proporcional a (b) e a (d^2), isolando-se S à direita da equação, deve-se dispor essas grandezas no numerador, devidamente multiplicadas pela constante de proporcionalidade. O quadrado da distância entre os suportes da viga, representado por (x^2), é inversamente proporcional a S, e deve ser colocado no denominador.

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

Exemplo 2 (ENEM – 2013): Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com $14\ \mathrm{m}^3$ de concreto. Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75 b) 2,00 c) 2,33 d) 4,00 e) 8,00

Resolução: Uma resolução clássica observada em livros didáticos consiste em atribuir uma denominação a cada uma das quantidades de cada grandeza (*c* para cimento, *a* para areia e *b* para brita), e sistematizar suas relações:

$$\frac{c}{1}=\frac{a}{4}=\frac{b}{2}=\frac{c+a+b}{1+4+2}=\frac{14}{7}=2$$

Basta, agora, calcular o valor de c: $\frac{c}{1}=2\Rightarrow c=2$

No entanto, parece mais simples assumir valores proporcionais de cada grandeza de forma mais direta a cada um dos numerais apresentados e a uma constante de proporcionalidade *x*, a saber:

Cimento: x ¦ Areia: $4x$ ¦ Brita: $2x$

Assim, deduz-se que $x+4x+2x=14\Rightarrow 7x=14\Rightarrow x=2$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

Discorrer sobre proporcionalidade implica mencionar um dos procedimentos mais usuais de cálculo, não só na Matemática, mas, sobretudo, no mundo real, no cotidiano das mais diversas profissões. Tal procedimento recebe o nome de **regra de três** (**simples** ou **composta**). A **regra de três simples** consiste num método prático para resolver problemas envolvendo *duas grandezas direta ou*

inversamente proporcionais. Já a **regra de três composta** envolve *três ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais*. Nos dois exemplos seguintes tal método é utilizado:

Exemplo 1 (ENEM – 2013): Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga, de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos b) 360 tijolos c) 400 tijolos d) 480 tijolos e) 600 tijolos

Resolução: De acordo com o enunciado, 1500 telhas equivalem a 1200 tijolos, que é a capacidade máxima do caminhão. Como o veículo já foi carregado com 900 telhas, ainda seria possível colocar $1500-900=600$ **telhas**. Basta agora determinar quantos tijolos equivalem a essa quantidade de telhas, lançando mão de uma *regra de três simples* envolvendo as grandezas telhas e de tijolos:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{telhas} & & \text{tijolos} \\ 1500 & \rightarrow & 1200 \\ 600 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1500}{600}=\frac{1200}{x} \Rightarrow 1500\cdot x=600\cdot 1200 \Rightarrow x=480 \text{ tijolos}$$

Note que a relação entre a quantidade de telhas e a quantidade de tijolos é diretamente proporcional, pois, diminuindo a quantidade de telhas diminuirá a quantidade de tijolos.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

Exemplo 2 (FUVEST): Uma família composta de 6 pessoas consome em 2 dias 3 kg de pão. Quantos quilos de pão serão necessários para alimentá-la durante 5 dias, estando ausentes 2 pessoas?

Resolução: Na resolução deste problema utilizar-se-á a *regra de três composta* envolvendo três grandezas (número de pessoas, dias e kg de pão consumidos) denotadas no esquema a seguir:

n.º de pessoas	dias	kg (pão)
6	2	3
4	5	y

Analisando a proporcionalidade entre as grandezas, temos que:

i) A relação entre o número de dias e a quantidade de pão consumida é ***diretamente proporcional***, pois, aumentando o número de dias aumentará a quantidade de pão consumida.

ii) A relação entre o número de pessoas e a quantidade de pão consumida é ***diretamente proporcional***, pois, diminuindo o número de pessoas diminuirá a quantidade de pão consumida.

Assim: $\frac{3}{y} = \frac{6}{4} \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3}{y} = \frac{12}{20} \Rightarrow 12 \cdot y = 60 \Rightarrow y = 5$

Resposta: Serão necessários 5 kg de pão para alimentar 4 pessoas durante 5 dias.

PORCENTAGEM

Define-se porcentagem como sendo uma fração cujo denominador é igual a 100. Utiliza-se o símbolo % para representar a porcentagem, cujo valor numérico pode ser expresso em forma de fração ou número decimal. Observe os seguintes exemplos:

a) $47\% = \frac{47}{100} = 0{,}47$ | b) $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ | c) $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Via de regra, a porcentagem é calculada lançando-se mão de uma regra de três. Observe alguns exemplos:

Exemplo 1: Calcule 30% de 75.

Resolução: Em porcentagem, a preposição "de" pode ser substituída pela multiplicação. Assim:

$$30\% \text{ de } 75 = \frac{30}{100} \cdot 75 = 0{,}3 \cdot 75 = 22{,}5$$

Resposta: 30% de 75 resulta em 22,5.

Exemplo 2: 28 equivale a qual percentual num total de 80?

Resolução: O número 28, num total de 80, pode ser representado por meio da fração $\frac{28}{80} = 0{,}35$. Lembrando que porcentagem equivale a uma fração com denominador igual a 100, então, $0{,}35 = \frac{35}{100} = 35\%$.

Resposta: O número 28, num total de 80, equivale a 35%.

Exemplo 3 (ENEM – 2014): Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas. Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses. Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser

a) 72% b) 68% c) 64% d) 54% e) 18%

Resolução: Se 36% do volume total diário de esgoto é tratado, então, 64% não são tratados, o que equivale a 8 bilhões de litros. Considerando *x* como sendo o volume total, por meio da *regra de três simples* envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais, temos:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{volume de esgosto (em bilhões de litros)} & & \%\ \text{(esgoto)} \\ 8 & \rightarrow & 64 \\ x & \rightarrow & 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{64}{100} \Rightarrow x \cdot 64 = 8 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{800}{64} \Rightarrow x = 12{,}5 \text{ bilhões de litros}$$

Considerando-se constante o volume de esgoto gerado (12,5 bilhões de litros) e sabendo que 4 bilhões de litros continuarão a ser lançados na água sem tratamento, então, para determinar a quantidade de esgoto que será tratado utiliza-se a operação $12{,}5 - 4 = 8{,}5$ bilhões de litros. Para obter o percentual de esgoto tratado, pode-se utilizar a seguinte relação:

$$\frac{8,5}{12,5} = 0,68 = \frac{68}{100} = 68\%$$

Assim, o percentual de esgoto a ser tratado será de 68%.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

AUMENTO E DESCONTO PERCENTUAL

Para compreender melhor o conceito de aumento e desconto percentual, é necessário entender o coeficiente de multiplicação. Para tal, introduziremos alguns exemplos.

Exemplo 1: Se o valor inicial de uma mercadoria é *x*, e sobre esse valor incide um aumento de 27%, qual o valor final da mercadoria?

Resolução: Consideremos $x + 0,27 \cdot x = 1,27 \cdot x$. Note que o fator multiplicativo (1,27) é calculado por meio da soma $1 + \overbrace{0,27}^{27\%}$. Assim, se o aumento for de *p*%, o fator multiplicativo será $1 + \frac{p}{100}$.

O mesmo ocorre com os descontos, no entanto, subtrai-se a porcentagem do valor inicial, ficando $1 - \frac{p}{100}$.

Exemplo 2: Se o valor inicial de uma mercadoria é *x*, e sobre esse valor incide um desconto de 27%, restará quanto do valor inicial?

Resolução: Considerando *x* como sendo o valor inicial, e aplicando um desconto de 27% sobre este valor, ter-se-á o seguinte:

$$x - 0,27 \cdot x = 0,73 \cdot x$$

Note que restarão 73% do valor original, já que se descontaram 27% de 100%.

Exemplo 3 (ENEM – 2013): Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do

preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

a) 15,00. b) 14,00. c) 10,00. d) 5,00. e) 4,00.

Resolução: Como o produto custava R$ 50,00 e houve remarcação, gerando desconto de 20%, seu preço passou a ser $0{,}8 \cdot 50{,}00 = 40{,}00$ reais. Se possuísse o cartão fidelidade da loja, receberia 10% de desconto sobre esse valor, ou seja, $0{,}1 \cdot 40{,}00 = 4{,}00$ reais.

Resposta: A alternativa correta é a letra **e.**

JUROS SIMPLES

A partir de um capital inicial *C*, pode-se incidir um percentual de aumento sobre esse valor, durante um período de tempo *n*. Isso configura uma Progressão Aritmética, cuja razão nada mais é do que o produto desse capital pela taxa de juros *i*. Após esse período, pode-se resgatar ou quitar a importância final, denominada montante *M*. O rendimento (ou juros) *j* de um empréstimo ou aplicação financeira é a diferença entre o montante e o capital inicial.

$$J = C \cdot i \cdot n \qquad (1.^{\text{a}} \text{ equação})$$
$$M = C + J \qquad (2.^{\text{a}} \text{ equação})$$

Substituindo a 1.ª equação na 2ª, temos:

$$M = C + (C \cdot i \cdot n) = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

Utilizando tal expressão é possível solucionar inúmeros problemas matemáticos. A seguir constam dois exemplos:

Exemplo 1: Determine o rendimento recebido pela aplicação de R$ 2.000,00, a uma taxa de juros simples de 12% ao ano, por um período de 3 anos.

Resolução: No quadro seguinte, apresenta-se o rendimento obtido ano a ano, bem como o montante e o total de juros após os 3 anos de aplicação do capital inicial (R$ 2000,00) a uma taxa de juros simples de 0,12 ao ano:

Ano	Juros (R$)
1	$0{,}12 \cdot 2000{,}00 = 240{,}00$
2	$0{,}12 \cdot 2000{,}00 = 240{,}00$
3	$0{,}12 \cdot 2000{,}00 = 240{,}00$
	Total = 720,00

É possível, também, determinar o rendimento recebido através da seguinte expressão:

$$J = C \cdot i \cdot n = 2000{,}00 \cdot 0{,}12 \cdot 3 = 720{,}00$$

Resposta: O rendimento será de R$ 720,00.

Exemplo 2 (ESAF): Uma certa importância foi aplicada a juros simples de 48% a.a., durante 60 dias. Findo o prazo, o montante apurado foi reaplicado por mais 120 dias, a uma taxa de 60% a.a., mantendo-se o mesmo regime de capitalização. Admitindo-se que o último montante foi de R$ 207,36, qual foi o capital inicial da primeira operação?

a) R$ 200,00 b) R$ 180,00 c) R$ 160,00 d) R$ 150,00 e) R$ 144,00

Resolução: Seja y a importância inicial (capital inicial – C). Este capital foi aplicado, considerando-se juros simples, a um percentual de 48% ao ano, durante o período de 60 dias. Antes de realizar o primeiro cálculo utilizando-se a expressão $M = C(1 + i \cdot n)$, é necessário que o período e a taxa percentual estejam na mesma unidade de tempo. Para tanto, divide-se a taxa por 12 e o período por 30, ficando:

$$\frac{48\%\ \text{a.a.}}{12} = 4\%\ \text{a.m.} \qquad \vdots \qquad \frac{60\ \text{dias}}{30} = 2\ \text{meses}$$

Substituindo-se tais valores na referida expressão, temos:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n) \Rightarrow M = y \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 2) \Rightarrow M = y \cdot (1{,}08)$$

Conforme o enunciado, o montante obtido $(M = 1{,}08y)$ foi reaplicado, considerando-se juros simples, a um percentual de 60% ao ano, durante o período de 120 dias. Novamente, deve-se igualar a unidade de tempo do período e da taxa percentual, ficando:

$$\frac{60\%\ \text{a.a.}}{12} = 5\%\ \text{a.m.} \qquad \vdots \qquad \frac{120\ \text{dias}}{30} = 4\ \text{meses}$$

Utilizando o montante obtido como o 'novo' capital inicial, e substituindo os valores acima na expressão $M = C(1 + i \cdot n)$, temos:

$$M = 1{,}08y(1 + 0{,}05 \cdot 4) \Rightarrow M = 1{,}08y(1{,}2) \Rightarrow M = 1{,}296y$$

Sabendo que o último montante foi de R$ 207,36, temos: $207{,}36 = 1{,}296y \Rightarrow y = 160{,}00$

Logo, o capital inicial foi de R$ 160,00.

Resposta: A alternativa correta é a letra **c.**

JUROS COMPOSTOS

No regime de juros compostos, a taxa de juros incide sobre o capital vigente no período de tempo correspondente, ou seja, dia a dia, mês a mês, ano a ano etc., sempre sobre o montante naquele momento. É o que se denomina juros sobre juros, que se configura em uma Progressão Geométrica.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Observe que é possível calcular o montante multiplicando-se o capital inicial pelo coeficiente de multiplicação elevado ao período de tempo.

Utilizando a referida expressão é possível solucionar inúmeros problemas matemáticos. A seguir constam dois exemplos:

Exemplo 1: Determine o rendimento recebido pela aplicação de R$ 2.000,00, a uma taxa de juros compostos de 12% ao ano, por um período de 3 anos.

Resolução: No quadro seguinte, apresenta-se o rendimento obtido ano a ano, bem como o montante e o total de juros após os 3 anos de aplicação do capital inicial (R$ 2000,00) a uma taxa de juros compostos de 0,12 ao ano:

Ano	Montante (R$)	Juros (R$)
0	2000,00	
1	$2000{,}00 + 240{,}00 = 2240{,}00$	$0{,}12 \cdot 2000{,}00 = 240{,}00$
2	$2240{,}00 + 268{,}80 = 2508{,}80$	$0{,}12 \cdot 2240{,}00 = 268{,}80$
3	$2508{,}80 + 301{,}06 = 2809{,}86$	$0{,}12 \cdot 2508{,}80 = 301{,}06$
		Total de Juros $= 809{,}86$

Tal cálculo pode ser efetuado a partir da expressão esboçada anteriormente:

$$M = 2000{,}00 \cdot (1 + 0{,}12)^3 = 2000{,}00 \cdot (1{,}12)^3 = 2000{,}00 \cdot 1{,}404928 = 2809{,}86$$

Sabendo-se que $M = C + J$, então, o rendimento (juros) será:

$$M = C + J \Rightarrow 2089{,}86 = 2000{,}00 + J \Rightarrow 2809{,}86 - 2000{,}00 = J \Rightarrow J = 809{,}86$$

Resposta: O rendimento será de R$ 809,86.

No exemplo abaixo, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

Exemplo 2 (UFBA): Um aparelho eletrodoméstico está à venda pelo preço de R$ 300,00, numa loja que oferece as seguintes opções de pagamento:

Plano A: à vista, com 5% de desconto;

Plano B: pagamento no prazo de um mês, sem desconto nem acréscimo;

Plano C: pagamento no prazo de dois meses, com juro composto de 5% a.m.

Uma segunda loja vende o mesmo aparelho por um preço 5% mais caro que a anterior, mas oferece um desconto de 10% à vista.

Com base nessas informações, é correto afirmar que, se um cliente:

(01) optar pelo plano B, pagará 5% a mais que o outro que optar pelo plano A.

(02) preferir o pagamento à vista, será mais vantajoso comprar na segunda loja.

(04) optar pelo plano C, pagará um valor maior que R$ 330,50.

(08) aplicar, no dia da compra, a uma taxa de 7% a.m., considerando juros compostos, o dinheiro que usaria para o pagamento à vista no plano A, após dois meses terá o suficiente para o pagamento do valor correspondente ao plano C.

(16) comprar dois aparelhos à vista, um em cada loja, a média dos preços dos aparelhos será inferior a R$ 285,00.

Resolução: Inicialmente, calculemos os preços do aparelho eletrodoméstico considerando os planos de pagamento das duas lojas. Na primeira loja, observamos os seguintes:

Plano A (à vista, com 5% de desconto): $300{,}00 \cdot 0{,}95 = 285{,}00$

Plano B (após um mês): 300,00

Plano C (pagamento no prazo de 2 meses, com juro composto de 5% a.m.): Utilizando a expressão estudada, temos:

$$M = 300{,}00 \cdot (1+0{,}05)^2 = 300{,}00 \cdot (1{,}05)^2 = 300{,}00 \cdot 1{,}1025 = 330{,}75$$

Na segunda loja, o mesmo aparelho custa 5% a mais em comparação ao preço da primeira loja, logo, o seu preço de venda é $300{,}00 + 300{,}00 \cdot 0{,}05 = 315{,}00$. Por oferecer um desconto de 10% no pagamento à vista, o cliente pagará $315{,}00 \cdot 0{,}90 = 283{,}50$.

Em síntese, o quadro a seguir denota os preços do aparelho eletrodoméstico considerando os planos de pagamento das duas lojas:

Loja		Preço (R$)
A	Plano A	285,00
	Plano B	300,00
	Plano C	330,75
B		283,50

Mediante tais preços, é possível verificar cada uma das opções enumeradas de modo a identificar as corretas.

A opção (01) é falsa, pois, $\frac{300}{285} \cong 1{,}0526$. Assim, o preço a ser pago pelo cliente será de, aproximadamente, 5,26%, e não 5% como propõe o enunciado.

A opção (02) é verdadeira, pois é o menor valor entre os preços calculados.

A opção (04) é verdadeira, pois o preço – conforme o Plano C – será de 330,75.

A opção (08) é falsa, pois o montante obtido é menor se comparado ao preço do Plano C. Observe o cálculo:

$$M = 285{,}00 \cdot (1+0{,}07)^2 = 285{,}00 \cdot (1{,}07)^2 = 285{,}00 \cdot 1{,}1449 \cong 326{,}30$$

A opção (16) é verdadeira, pois $\frac{285{,}00 + 283{,}50}{2} = 284{,}25$ é inferior a R$ 285,00.

Resposta: Logo, somando-se os valores das opções corretas, temos: $2+4+16=22$.

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Sequência é um conjunto ordenado de números. Progressão Aritmética é toda sequência numérica na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante e se denomina **razão** (*r*). Se a razão for positiva $(r>0)$, diz-se que a PA é crescente; se for negativa $(r>0)$ será decrescente e, para uma razão nula $(r=0)$, a PA será constante. Observe os seguintes exemplos:

a) $(3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots)$	$r=4$	Crescente
b) $(10,\ 8,\ 6,\ 4,\ \ldots)$	$r=-2$	Decrescente
c) $(7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots)$	$r=0$	Constante

Seja a_1 o primeiro termo e a_n o enésimo termo de uma PA de razão *r*. Pode-se definir a fórmula do termo geral como:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

Exemplo 1: Supondo que o primeiro termo de uma PA, de razão 4, seja 5, então, qual será o seu vigésimo termo?

Resolução: Para determinar o vigésimo termo desta PA utiliza-se a expressão do termo geral:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)\cdot r \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19\cdot r \Rightarrow a_{20} = 5 + 19\cdot 4 \Rightarrow a_{20} = 5 + 76 = 81$$

Resposta: O vigésimo termo da referida PA é 81.

É possível, também, relacionar dois termos quaisquer de uma PA. Para tanto, basta que o módulo da diferença entre seus índices seja igual ao coeficiente de *r*.

Ex.: $\underbrace{a_{15} = a_3}_{|15-3|=12} + \overbrace{(12)}^{\text{Coeficiente de } r.} \cdot r$

Sabe-se, ainda, que qualquer termo de uma PA é a média de seus termos adjacentes, ou seja, dada a PA $(a,\ b,\ c)$, então:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Tal propriedade é conhecida como *propriedade do termo do meio*.

Note que, sendo $(a,\ b,\ c)$ uma PA, então, $b = a + r$ e $c = b + r \Rightarrow c = a + r + r = a + 2r$. Substituindo tais valores na expressão anterior, temos:

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow \overbrace{a+r}^{b} = \frac{a+\overbrace{a+2r}^{c}}{2} \Rightarrow a + r = \frac{2a+2r}{2} \Rightarrow a + r = a + r$$

Exemplo 2: Observe a sequência seguinte:

$$-3,\ x,\ 7$$

Sabendo que tal sequência é uma PA, então, qual é o valor de *x*?

Resolução: Por se tratar de uma PA, o termo *x* é a média dos termos adjacentes $(-3 \text{ e } 7)$. Assim:

$$x = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Resposta: Logo, o valor de *x* é 2.

Também se observa a propriedade dos termos equidistantes, na qual a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Por exemplo, consideremos a PA finita $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n)$. Segundo tal propriedade, a seguinte igualdade é válida:

$$\underbrace{a_2 + a_{n-1}}_{\substack{\text{Soma dos termos}\\ \text{equidistantes}\\ \text{dos extremos.}}} = \underbrace{a_1 + a_n}_{\substack{\text{Soma dos}\\ \text{extremos.}}} \Rightarrow \underbrace{(a_1 + r)}_{a_2} + \underbrace{(a_n - r)}_{a_{n-1}} = a_1 + a_n \Rightarrow a_1 + a_n = a_1 + a_n$$

Em relação à soma dos termos de uma PA utiliza-se a seguinte expressão:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo;} \\ a_n \text{ é o enésimo termo e} \\ n \text{ indica o número de termos da PA.} \end{cases}$$

Veja, a seguir, a resolução de uma questão de vestibular na qual se faz uso da propriedade do termo do meio e da soma dos termos de uma PA:

Exemplo 3 (FUVEST – 2012): Considere uma progressão aritmética cujos três primeiros termos são dados por:

$$a_1 = 1 + x, \quad a_2 = 6x, \quad a_3 = 2x^2 + 4,$$

em que x é um número real.

a) Determine os possíveis valores de x.

b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de x encontrado no item a).

Resolução: a) Utilizando a propriedade do termo do meio, temos que:

$$\frac{\overbrace{1+x}^{a_1} + \overbrace{2x^2+4}^{a_3}}{2} = \overbrace{6x}^{a_2} \Rightarrow 1 + x + 2x^2 + 4 = 12x \Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0$$

Para determinar as raízes da equação do 2.º grau utiliza-se a fórmula de Bháskara. Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta = (-11)^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = 121 - 40 = 81$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{11+9}{4}=\dfrac{20}{4}=5\\ x_2=\dfrac{11-9}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 5 \text{ e } \frac{1}{2} \text{ são as raízes da equação.}$$

b) O menor valor de *x*, encontrado em a), é $\frac{1}{2}$. Assim, o primeiro termo da PA é $a_1=1+x=1+0{,}5=1{,}5$. Seu segundo termo é $a_2=6x=6\cdot 0{,}5=3$. Deste modo, a razão será $r=a_2-a_1=3-1{,}5=1{,}5$. Para calcular a soma dos 100 primeiros termos desta PA (S_{100}), é necessário, primeiro, calcular o seu centésimo termo:

$$a_{100}=a_1+99\cdot r\Rightarrow a_{100}=1{,}5+99\cdot 1{,}5\Rightarrow a_{100}=150$$

Utilizando a expressão da soma dos termos de uma PA, temos:

$$S_{100}=\frac{(a_1+a_{100})\cdot n}{2}\Rightarrow S_{100}=\frac{(1{,}5+150)\cdot 100}{2}\Rightarrow S_{100}=7575$$

Respostas: a) Os possíveis valores de *x* são 5 ou $\frac{1}{2}$.

b) A soma dos 100 primeiros termos da PA, considerando-se o menor valor para *x*, é 7.575.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Progressão Geométrica é toda sequência numérica cuja razão (quociente) entre cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior é constante e se denomina **razão** (*q*). Em relação aos tipos de PG, dependendo da razão q, observam-se as seguintes classificações:

1.ª) **Crescente:** A PG é crescente quando $q>1$ e os termos são positivos **ou** quando $0<q<1$ e os termos são negativos. Veja os exemplos:

a) $(2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \ldots)$, na qual $q=3$.

b) $(-8,\ -4,\ -2,\ -1,\ \ldots)$, com $q=\frac{1}{2}$.

2.ª) **Decrescente:** A PG é decrescente quando $0 < q < 1$ e os termos são positivos **ou** quando $q > 1$ e os termos são negativos. Observe os exemplos:

a) $(8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \ldots)$, em que $q = \frac{1}{2}$.

b) $(-3,\ -9,\ -27,\ -81,\ \ldots)$, na qual $q = 3$.

3.ª) **Constante:** A PG é constante quando $q = 1$. Por exemplo:

a) $(7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots)$, com $q = 1$.

4.ª) **Alternante** ou **Oscilante:** A PG é alternante quando $q < 0$. Por exemplo:

a) $(-2,\ 6,\ -18,\ 54,\ \ldots)$, na qual $q = -3$.

5.ª) **Singular** ou **Estacionária:** A PG é singular quando $q = 0$. Por exemplo:

a) $(9,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, com $q = 0$.

Para determinar o enésimo termo a_n de uma PG de razão q e primeiro termo a_1, basta utilizar a expressão do termo geral, denotada a seguir:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplo 1: Supondo que o sétimo termo de uma PG, de razão 2, seja 128, então, qual será o primeiro termo?

Resolução: Para determinar o primeiro termo desta PG utiliza-se a expressão do termo geral:

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} \Rightarrow 128 = a_1 \cdot 2^6 \Rightarrow 128 = a_1 \cdot 64 \Rightarrow a_1 = \frac{128}{64} \Rightarrow a_1 = 2$$

Resposta: O primeiro termo da referida PG é 2.

De modo semelhante ao observado na PA, dois termos quaisquer de uma PG podem ser relacionados entre si:

Ex.: $a_{15} = a_3 \cdot q^{12}$

Em relação ao termo do meio de uma PG $(a,\ b,\ c)$, observa-se a seguinte expressão:

$$b^2 = a \cdot c$$

Observe que, sendo $(a,\ b,\ c)$ uma PG, então, $b = a \cdot q$ e $c = b \cdot q \Rightarrow c = (a \cdot q) \cdot q = a \cdot q^2$ Substituindo tais valores na expressão anterior, temos:

$$b^2 = a \cdot c \Rightarrow \left(\overbrace{a \cdot q}^{b}\right)^2 = a \cdot \left(\overbrace{a \cdot q^2}^{c}\right) \Rightarrow a^2 \cdot q^2 = a^2 \cdot q^2$$

Exemplo 2: Em uma PG crescente, o 3.º termo é -15 e o 5.º termo é $-\frac{5}{3}$. Qual será o valor do 4.º termo? E, qual será o valor da razão *q*?

Resolução: Sabendo-se que $a_3 = -15$ e $a_5 = -\frac{5}{3}$, utilizando a expressão do termo do meio de uma PG é possível determinar o valor de a_4. Observe:

$$(a_4)^2 = a_3 \cdot a_5 \Rightarrow (a_4)^2 = -15 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow (a_4)^2 = 25 \Rightarrow a_4 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow a_4 = \pm 5$$

Note que, por ser uma PG crescente, desconsidera-se o valor positivo de a_4 obtido. Assim, $a_4 = -5$.

Para calcular a razão *q*, basta dividir o 4.º termo pelo 3.º: $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$.

Resposta: O 4.º termo da referida PG é -5 e a razão é $\frac{1}{3}$.

Assim como se verificou na PA, em uma PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos. Por exemplo, consideremos a PG finita $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n)$. Segundo tal propriedade, a seguinte igualdade é válida:

$$\underbrace{a_2 \cdot a_{n-1}}_{\text{Produto dos termos equidistantes dos extremos.}} = \underbrace{a_1 \cdot a_n}_{\text{Produto dos extremos.}} \Rightarrow \underbrace{(a_1 \cdot q)}_{a_2} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_n}{q}\right)}_{a_{n-1}} = a_1 \cdot a_n \Rightarrow a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_n$$

Da expressão anterior, deduz-se que o produto P_n dos *n* primeiros termos de uma PG pode ser expresso por:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Por exemplo, consideremos a PG finita $(2,\ 4,\ 8,\ 16)$. Aplicando tal propriedade, temos:

$$|P_4| = \sqrt{(2 \cdot 16)^4} \Rightarrow |P_4| = \sqrt{(32)^4} \Rightarrow |P_4| = 32^2 \Rightarrow |P_4| = 1024$$

Verificando: $P_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \Rightarrow P_4 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \Rightarrow P_4 = 1024$

Sabe-se, também, que para calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PG finita, de razão $q \neq 1$, utiliza-se a seguinte expressão:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Tal fórmula pode, também, ser expressa como:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Agora, para calcular a soma dos termos de uma PG infinita (ou convergente), faz-se uso da seguinte expressão:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q},\ \text{onde}\ -1 < q < 1$$

Observe a resolução de um problema na qual se utilizam alguns dos conceitos envolvendo uma PG:

Exemplo 3 (FUVEST – 2009): A soma dos cinco primeiros termos de uma PG, de razão negativa, é $\frac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo da PG é igual a 3. Nessas condições, determine:

a) A razão da PG.

b) A soma dos três primeiros termos da PG.

Resolução: a) De acordo com o enunciado, sabe-se que:

$$S_5 = \frac{1}{2},\ q < 0 \text{ e } a_7 - a_2 = 3$$

Assim:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow \frac{1}{2} = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow 2 \cdot a_1 \cdot \left(q^5 - 1\right) = q - 1 \ \text{(I)}$$

$$a_7 - a_2 = 3 \Rightarrow \underbrace{a_1 \cdot q^6}_{a_7} - \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} = 3 \Rightarrow a_1 \cdot q \cdot \left(q^5 - 1\right) = 3 \ \text{(II)}$$

Dividindo-se (I) por (II), obtém-se:

$$\frac{2 \cdot a_1 \cdot \left(q^5 - 1\right)}{a_1 \cdot q \cdot \left(q^5 - 1\right)} = \frac{q - 1}{3} \Rightarrow \frac{2}{q} = \frac{q - 1}{3} \Rightarrow q^2 - q = 6 \Rightarrow q^2 - q - 6 = 0$$

Para determinar as raízes da equação do 2.º grau $\left(q^2 - q - 6 = 0\right)$ utiliza-se a fórmula de Bháskara. Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ q_2 = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow 3 \text{ e } -2 \text{ são as raízes da equação.}$$

Como $q < 0$, então $q = -2$.

b) Sabendo-se que a razão é -2, é possível obter o primeiro termo da PG substituindo tal valor na expressão (II):

$$a_1 \cdot q \cdot \left(q^5 - 1\right) = 3 \Rightarrow a_1 \cdot \left(-2\right) \cdot \left(-2^5 - 1\right) = 3 \Rightarrow a_1 \cdot 66 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{22}$$

Utilizando a expressão da soma dos termos de uma PG finita, temos que:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{22} \cdot \frac{1-\left(-2\right)^3}{1-\left(-2\right)} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{22} \cdot \frac{1-\left(-8\right)}{1+2} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{22} \cdot \frac{1+8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{22} \cdot \frac{9}{3} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{22} \cdot 3 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{22}$$

Respostas: a) A razão da PG é -2.

b) A soma dos três primeiros termos da PG é $\frac{3}{22}$.

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

4 FUNÇÕES

As primeiras ideias relacionadas ao conceito de função matemática começam a aparecer no século XVII, a partir da necessidade de observar e descrever matematicamente fenômenos e leis da natureza, buscando explicação para eles.

Cientistas como Galileu Galilei[1] e Isaac Newton[2], por exemplo, trabalharam com noções de lei e dependência, as quais estão fortemente ligadas ao conceito de função. Esse conteúdo é importante não apenas aos interesses da Matemática, mas também tem sido utilizado em outras ciências, como a Física, a Química, a Biologia, entre outras.

Iniciaremos o estudo das funções matemáticas pensando na seguinte situação:

Situação problema: Uma empresa de telefonia móvel oferece um plano por R$ 60,00 por mês, no qual o cliente terá direito a 50 minutos em ligações locais. Após os 50 minutos, é cobrada uma tarifa de R$ 1,50/minuto excedido. Sendo assim:

a) Um cliente que fizer adesão a esse plano pagaria quanto, se utilizasse 40 minutos em ligações locais?
b) E se utilizasse 56 minutos, qual seria o valor pago?
c) O valor pago depende do tempo das ligações efetuadas?
d) Há uma forma de representar o valor pago pelo cliente em relação aos minutos utilizados mensalmente? Como seria?

Essa situação nos dá um exemplo de uma função matemática: há uma dependência entre o valor pago pelo cliente e o tempo empregado nas ligações.

O termo **função** passou por várias evoluções, no decorrer da História da Matemática. Esse termo foi utilizado pela primeira vez por volta de 1694, por Gottfried Wilhelm Leibniz[3], para expressar quantidades associadas a uma curva. Atualmente, a definição mais adotada para função é a do grupo Bourboki[4].

[1] Saiba mais em: http://educacao.uol.com.br/biografias/galileu-galilei.htm
[2] Visite: http://www.suapesquisa.com/biografias/isaacnewton/
[3] Veja mais: http://www.somatematica.com.br/biograf/leibniz.php
[4] Mais sobre: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/1865/1085

No movimento Matemática Moderna, proposto por esse grupo, fórmulas matemáticas foram desenvolvidas e usadas para associar padrões, realizar previsões em diversas áreas do conhecimento, não apenas na Matemática.

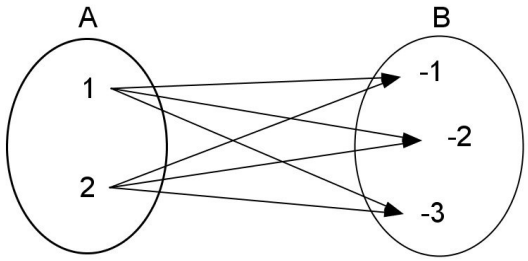
Para definir funções, vamos definir anteriormente outros conceitos.

Produto Cartesiano: Dados os conjuntos A e B, não vazios, o produto cartesiano de A em B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$.

Notação: $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{-1, -2, -3\}$. O produto cartesiano de A por B é o conjunto dado por:

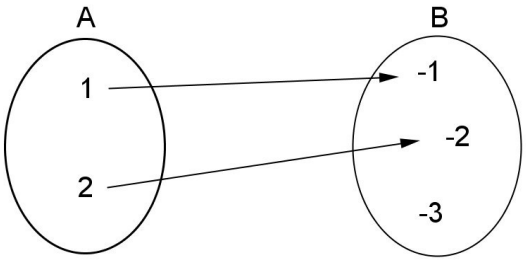
$$A \times B = \{(1, -1), (1, -2), (1, -3), (2, -1), (2, -2), (2, -3)\}$$



Relação: Uma relação (R) de A em B é dada por qualquer subconjunto do produto cartesiano de $A \times B$.

Exemplo: Consideremos dois conjuntos A e B descritos no exemplo anterior. Seja R a relação definida por $y = -x$.

Assim temos que $R = \{(x, y) \in A \times B / y = -x\} = \{(1, -1), (2, -2)\}$.



Função: A relação f de A em B é denominada uma função, quando, cada um dos elementos x do conjunto A estão associados à um único elemento y do conjunto B.

$$f : A \to B$$

O conjunto A é chamado **domínio da função** de A em B e é denotado por $D(f)$ ou apenas D. O conjunto B é denominado o **contradomínio** de f, denotado por $CD(f)$.

Definimos o **conjunto imagem da função** f, $\text{Im}(f)$, àquele subconjunto de B que possui os valores que foram associados aos valores de A pela função f. No exemplo anterior, temos que a relação R é uma função e seu conjunto imagem é dado por $\text{Im}(f) = \{-1, -2\}$.

Há várias formas de representar uma função. Pode ser através de uma fórmula, do diagrama de flechas, de uma tabela, de um gráfico.

Exemplos: Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$ e as relações de A em B dadas por: $R = \{(x, y) \in A \times B / y = x + 1\}$, $S = \{(x, y) \in A \times B / y = 2x\}$ e $T = \{(x, y) \in A \times B / y^2 = x\}$.

Resolução: Considerando os conjuntos A e B dados, temos as seguintes relações:

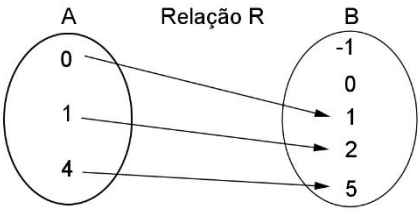
$$R = \{(x, y) \in A \times B / y = x + 1\} = \{(0, 1), (1, 2), (4, 5)\}$$

$$S = \{(x, y) \in A \times B / y = 2x\} = \{(0, 0), (1, 2)\}$$

$$T = \{(x, y) \in A \times B / y^2 = x\} = \{(0,\ 0),\ (1,\ -1),\ (1,\ 1),\ (4,\ 2)\}$$

Observamos que apenas a relação R é uma função, pois para cada um dos elementos $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ que se relaciona com ele.

Veja o diagrama a seguir.



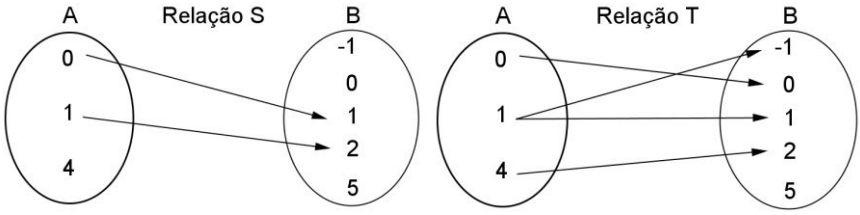
$D(f) = A = \{0,1,4\}$

$CD(f) = B = \{-1,0,1,2,5\}$

A $\text{Im}(f) = \{1,2,5\}$

relação S não é uma função, pois o elemento $4 \in A$ não possui um elemento em B que possa se relacionar com ele conforme a regra apresentada para S. A relação T também não é uma função, pois existem dois elementos em B, 1 e -1 que se relacionam com o mesmo elemento $1 \in A$.

Vejamos os diagramas das relações dadas:



Observe que a equação $y = x^2 - 5x + 6$ considerada com domínio e contradomínio iguais ao conjunto dos números reais é uma função de y em relação à x. Nesse caso o domínio e contradomínio são conjuntos infinitos, por isso não se apresenta um diagrama para ela, mas sim um gráfico, que é a representação no plano cartesiano dos pares ordenados que satisfazem tal equação. Vamos estudar mais profundamente cada um dos conjuntos envolvidos na função, assim como suas equações.

ESTUDO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Como já vimos, uma função definida por $f : A \to B$ tem o conjunto domínio $(D = A)$, contradomínio $(CD = B)$ e uma equação que representa a relação entre o domínio e o contradomínio.

O domínio da função, conjunto A, pode ser apresentado na definição da função, por exemplo: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=y=2x$, ou ainda outro exemplo $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que para cada $y\in\mathbb{R}$ existe um $n\in\mathbb{N}$ onde $y=n+2$.

No entanto, muitas vezes, o domínio da função não fica evidente, ele depende da equação envolvida na definição da função. Assim é possível defini-lo. Vejamos alguns exemplos:

Exemplos: 1) Na função $f(x)=\dfrac{7}{2x}$ o domínio pode ser todos os números reais exceto o zero, pois, por tratar-se de um quociente, o denominador deve ser diferente de zero. Assim, $2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$. Nesse caso, $D=\mathbb{R}^*=(x\in\mathbb{R}/\ x\neq 0)$.

2) Na função $f(x)=\sqrt{2x+4}$, o domínio pode ser qualquer número real maior ou igual a -2, porque, por tratar-se de uma raiz quadrada, sua condição de existência é que o radical seja positivo ou zero. Assim, $2x+4\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$, logo $D=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}$.

3) Na função $f(x)=\sqrt[5]{x^3+3}$ o domínio é composto por todos os números reais, visto que não há restrição alguma para uma raiz quíntupla.

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Os pares ordenados das relações podem ser representados no Plano Cartesiano associando à cada par (x,y) um ponto do plano com essas coordenadas. Assim a relação

$$R=\{(x,y)\in A\times B/\ y=x+1\}=$$
$$=\{(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (4,\ 5)\}=\{L,M,N\}$$ fica com a representação cartesiana ao lado.

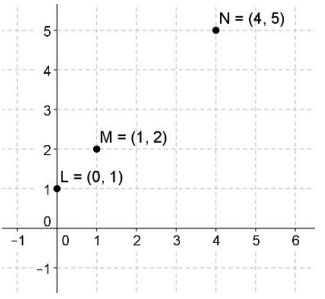
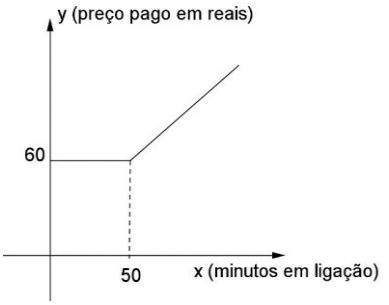


GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Voltando à situação inicial do plano de telefonia móvel, podemos representar a função através de um gráfico.

Sendo $y = f(x)$ o valor pago e x os minutos gastos em ligações locais, teríamos pontos nessa relação dados por $(x, f(x))$. A representação de todos os pontos se dá através do conjunto de retas mostrado no gráfico ao lado.



O domínio dessa função é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$, pois é infinito e contínuo e não há sentido em valores negativos para x, visto que não há quantidade de minutos negativos.

Além disso, essa situação seria descrita por duas sentenças:

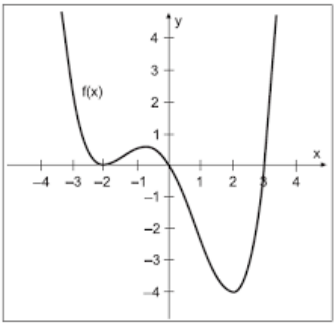
$$f(x) = \begin{cases} 60, & \text{para } 0 \leq x \leq 50 \\ 60 + 1{,}5 \cdot (x - 50), & \text{para } x > 50 \end{cases}$$

Observando um gráfico no plano cartesiano, podemos dizer se ele representa uma função de A em B ou não. A maneira gráfica para essa verificação está no fato de que retas paralelas ao eixo-y toquem a curva do gráfico apenas uma vez, indicando que a cada elemento do domínio existe um único elemento no contradomínio que se relaciona com ele. Ao se determinar que o gráfico representa uma função de A em B, podemos definir o domínio e o conjunto imagem através do seu gráfico.

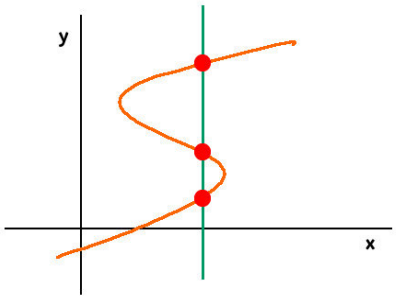
Exemplos:

a) Observe o gráfico[5] ao lado direito. Temos que esse gráfico define uma função cujos domínio e contradomínio são todos os números reais, enquanto que o conjunto imagem é dado pelos valores reais não inferiores à -4, isto é:

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -4\}.$$



[5]Fonte: Disponível em: <http://www.engenheirodepetroleo.com.br/pt/provas-resolvidas/engenheiro-de-petroleo/cesgranrio-2011-engenheiro-de-petroleo-q22/>. Acesso em: 20 jun. 2015.

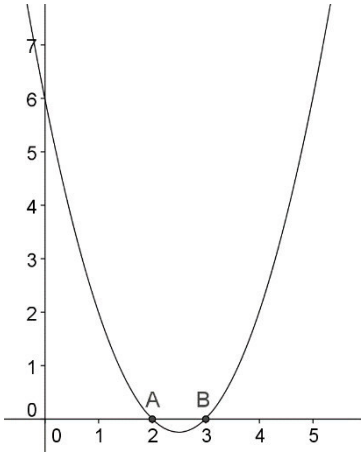


O gráfico[6] ao lado esquerdo não representa uma função de A em B, pois existem três interseções da reta paralela ao eixo-y e a curva apresentada no plano cartesiano.

ZEROS (OU RAÍZES) DE UMA FUNÇÃO

Os valores de $x \in D(f)$ tal que $f(x)=0$ são chamados de **zero da função** f. Graficamente esses valores podem ser observados na interseção da curva apresentada no plano cartesiano com o eixo-x.

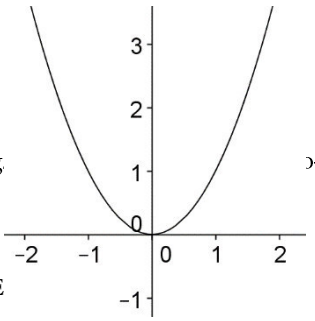
Exemplo: Considere a função dada pela equação $f(x)=x^2-5x+6$, temos $x_1=2$ e $x_2=3$ como sendo os zeros dessa função, pois, fazendo $f(x)=0$, temos, utilizando a fórmula de Bháskara para a equação, $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x_1=2$ e $x_2=3$.



Obs.: O ponto $(0,\ 6)$ é a interseção da curva apresentada no plano cartesiano com o eixo-y. Esse ponto juntamente com os pontos dados pelos zeros da função são importantes na determinação de um gráfico de função.

Função Par: Dizemos que uma função é par se para todo $x \in D(f)$, temos que é verdadeira a equação $f(x)=f(-x)$.

Exemplo: Para a lei $f(x)=x^2$, temos que:



[6]Fonte: Disponível em: <http://www.edusocial.com.br/blog/ representa-uma-funcao>. Acesso em: 20 jun. 2015.

$$f(-1)=(-1)^2=1=1^2=f(1).$$

Será que a igualdade se verifica para todos os reais do domínio dessa função? Sim, certamente, pois:

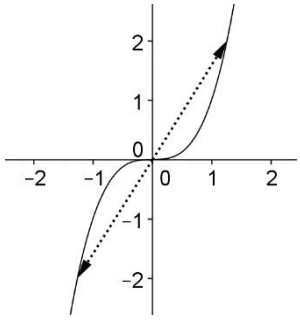
$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Observação: No gráfico anterior percebemos uma característica gráfica das funções pares, a qual é dada da seguinte forma: **"O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo-** y **".**

Função Ímpar: Uma função é chamada de função ímpar, se para todo $x\in D(f)$, temos que $f(-x)=-f(x)$.

Exemplo: Considere a função dada por $g(x)=x^3$. Nesse caso temos que:

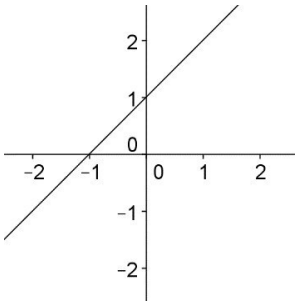
$$g(-1)=(-1)^3=-1=-(1)^3=-g(1).$$



Novamente, aqui, teremos que mostrar que essa igualdade se verifica para todos os pontos do domínio da função, o que pode ser visto da seguinte forma:

$$g(-x)=(-x)^3=(-1)^3\cdot(x)^3=-(x)^3=-g(x).$$

Observação 1: No gráfico dessa função $g(x)$, percebemos que a característica gráfica da função ímpar é sua **simetria em relação à origem do sistema.**



Observação 2: Há funções que não podem ser classificadas como par, nem como ímpar, por exemplo, considere a função real dada por $h(x)=x+1$. Note que: $h(-1)=0$ e $h(1)=2$, isso nos mostra que essa função não satisfaz nenhuma das igualdades citadas acima. Observe ainda o gráfico dessa função, é uma reta que não apresenta simetria em relação ao eixo-y, nem em relação à origem do sistema cartesiano.

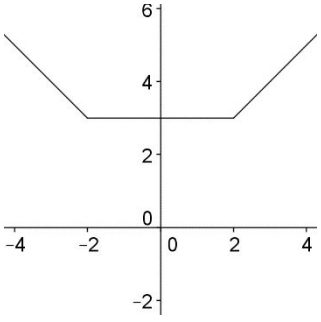
FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

Dado um intervalo contido no domínio de uma função f, se para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, sendo $x_1 < x_2$, temos que:

- Se $f(x_1) < f(x_2)$, então nessa função é dita crescente nesse intervalo;
- Se $f(x_1) > f(x_2)$, então essa função é dita decrescente nesse intervalo;
- Se $f(x_1) = f(x_2)$, então essa função é dita constante nesse intervalo. As funções constantes podem ser dadas da seguinte maneira: $f(x)=k,\ k \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

Considerando o gráfico da função, dada ao lado, temos que ela é decrescente para valores menores que -2, isto é, no intervalo $]-\infty,\ -2]$.

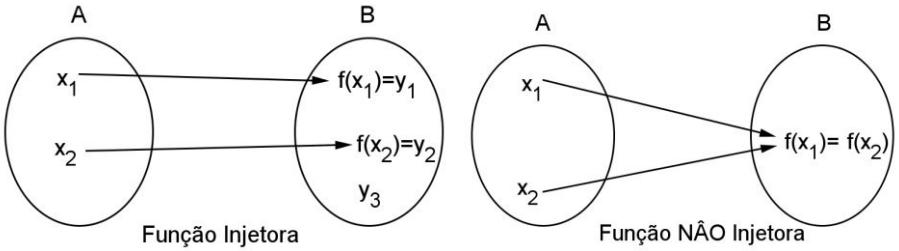


No intervalo $[-2,\ 2]$ a função é constante e para valores acima de 2, ou seja, no intervalo $[2,\ \infty[$ a função é crescente.

Função Injetora: Uma função $f: A \to B$ é chamada de injetora se, e somente se, para todo x_1 e x_2 pertencentes ao domínio da função, temos que:

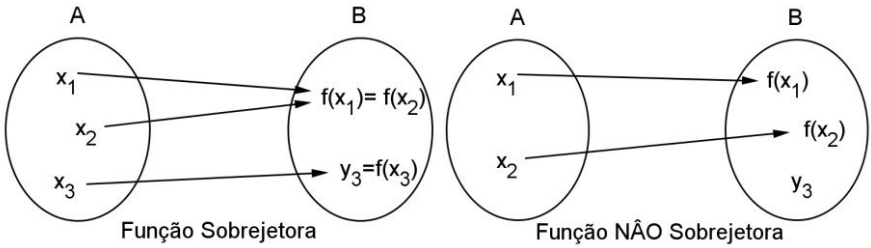
Se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou ainda, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exemplo: Apresentaremos os exemplos em Diagramas de Venn[7].

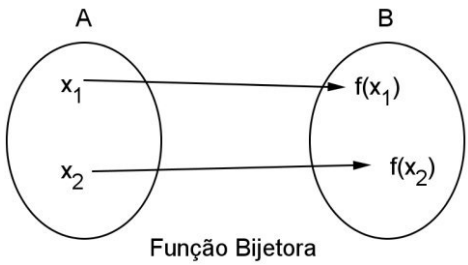


Função Sobrejetora: Uma função $f : A \to B$ é chamada de sobrejetora se, e somente se, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ainda podemos dizer que a função é sobrejetora se $\mathrm{Im}(f) = CD(f)$.

Exemplo: Apresentaremos os exemplos em Diagramas de Venn.



Função Bijetora: Uma função $f : A \to B$ é chamada de função bijetora se, e somente se, a função é injetora e sobrejetora, ou seja, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ e $\mathrm{Im}(f) = CD(f)$.

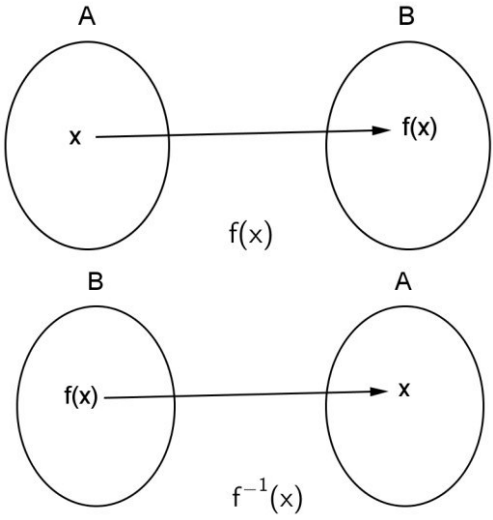


[7] Saiba mais em: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/diagrama-de-venn.htm

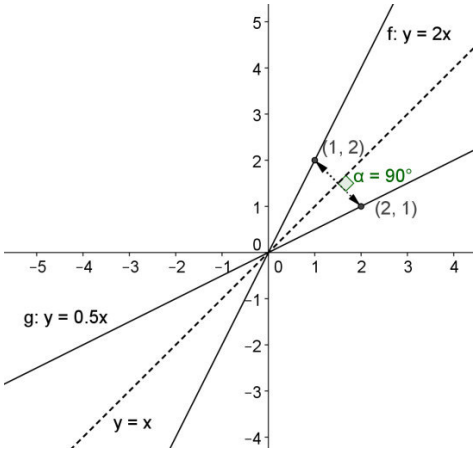
Função Inversa: Dada a função $f : A \to B$ pode-se definir uma função $g : B \to A$, chamada de função inversa se, e somente se, a função f é bijetora. A definição de g é dada da seguinte forma:

Se $f(a) = b$ para todo $a \in A$, então $g(b) = a$ para todo $b \in B$.

Observação: Denota-se a função inversa de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$ e, assim, temos que: $(x, y) \in f(x) \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}(x)$.



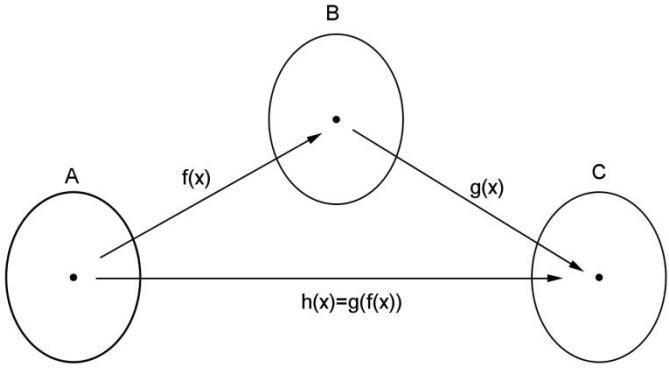
Exemplo: As funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{x}{2}$ são funções inversas. Temos, por exemplo, que $f(1) = 2$ e $g(2) = 1$, assim o par ordenado $(1, 2)$ está no gráfico da função $f(x)$ e o par ordenado $(2, 1)$ está no gráfico da função $g(x)$.



Observação: Uma característica gráfica das funções f e f^{-1} é que são simétricas em relação à função identidade representada pela reta $y = x$.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ de tal forma que $CD(f) = D(g)$, pode-se definir uma função $h : A \to C$ denominada de função composta de g e f da seguinte forma: $h(x) = g(f(x))$.



Observação: Outra notação para a função composta é dada por $h(x) = g \circ f(x)$. Temos, também, que $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = id(x) = x$.

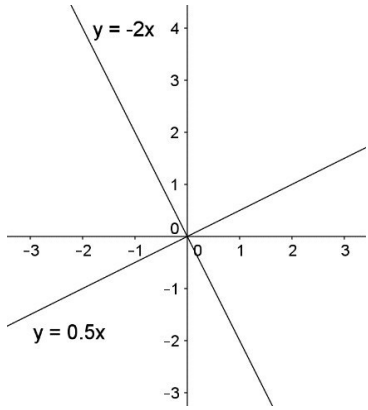
FUNÇÃO AFIM OU FUNÇÃO DO 1.º GRAU

Situação problema: Imaginemos um plano de telefonia celular, no qual o cliente paga um valor fixo de R$ 10,00 mensais mais uma tarifa de R$ 0,75 por minuto de ligação. Considerando $P(x)$ o preço pago mensalmente pelo cliente desse plano e x os minutos utilizados em ligações no mês, teríamos a função $P(x) = 10 + 0{,}75 \cdot x$, para $x \geq 0$, para representar o valor pago mensalmente pelo cliente. Esse tipo de função é denominada **função afim** ou **função do 1.º grau**.

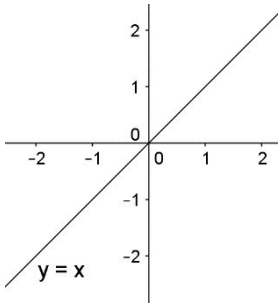
Função afim: É toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. O coeficiente a é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** e b é dito **coeficiente linear.**

Observação: Quando $b=0$, temos que $f(x)=ax$ e percebemos que a origem do sistema satisfaz sempre essa função, isto é, seu gráfico contém a origem $(0,\ 0)$.

Exemplo: Considere as funções reais dadas por $f(x)=-2x$ e $g(x)=0{,}5x$. A figura ao lado mostra os gráficos dessas duas funções.



Observação 1: Note que para essas funções, quando $a>0$ a função é crescente e quando $a<0$ a função é decrescente.



Observação 2: Destacamos que a função para a qual $a=1$, isto é, $f(x)=x$, é chamada de função identidade. Ao lado esquerdo temos o gráfico dessa função.

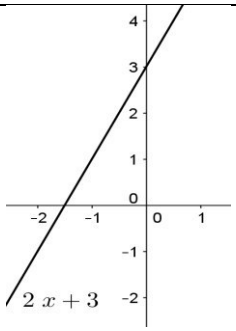
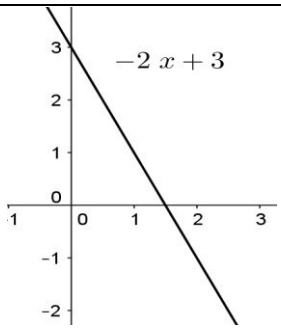
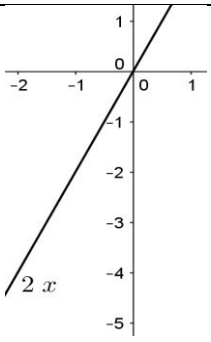
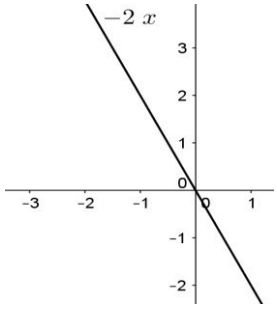
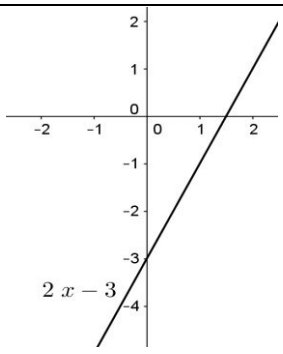
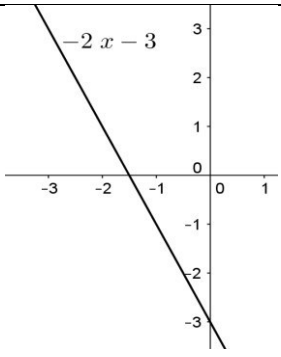
Zero (ou raiz) da função afim: É o número real x onde a função $f(x)=ax+b$ se anula, ou seja, $f(x)=0$. Para determinar a raiz da função fazemos:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}.$$

Exemplo: Determine o zero da função $f(x)=-3x+7$.

Fazendo $f(x)=0$ temos: $-3x+7=0 \Leftrightarrow -3x=-7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$.

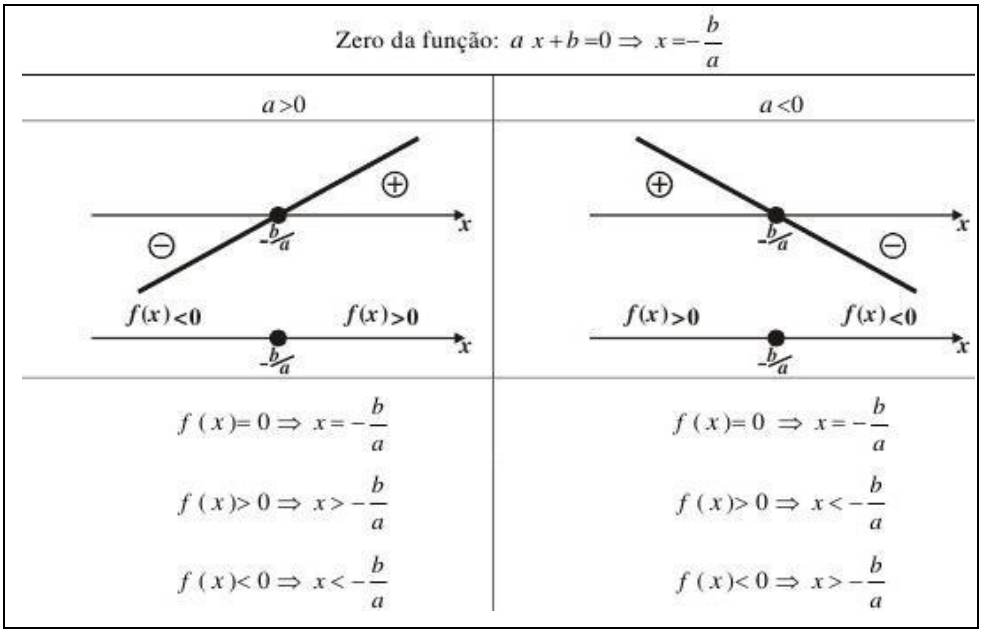
Observação: Considerando $x=0$ e a função afim $f(x)=ax+b$ temos que $f(0)=b$. Assim, o ponto $(0,\ b)$ é a interseção do gráfico da função afim com o eixo-y do plano cartesiano. O quadro a seguir mostra, de forma resumida, os efeitos dos parâmetros a e b no gráfico da função.

Parâmetros da Função Afim	$a>0$	$a<0$
$b>0$		
$b=0$		
$b<0$		

Observação: Caso o parâmetro seja $a=0$, temos uma função constante $f(x)=b\in\mathbb{R}$.

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

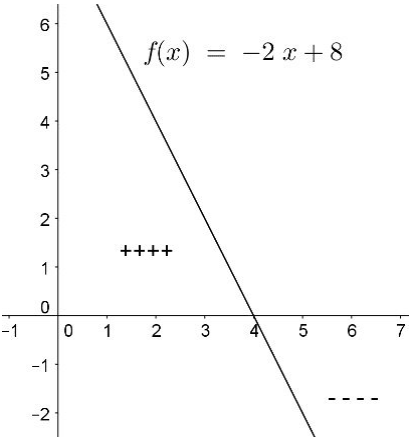
No quadro, a seguir, encontra-se um resumo para auxiliar o estudo de uma função afim:



Fonte: Disponível em: <http://pt.slideshare.net/faustofis/calclo-1-2-termo-de-papel-e-celulose>. Acesso em: 20 jun. 2015.

Exemplo: Estudar o sinal da função $f(x)=-2x+8$.

Primeiro, calculamos o zero (ou raiz) da função fazendo: $-2x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{2} \Leftrightarrow x=4$. Assim,



- a função é positiva $f(x)>0$ para $x<4$.
- a função é nula $f(x)=0$ para $x=4$.
- a função é negativa $f(x)<0$ para $x>4$.

INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU

Situação problema: Voltando à situação do plano de telefonia celular em que temos a função $P(x)=10+0{,}75\cdot x$, para $x\geq 0$, para representar o valor pago mensalmente pelo cliente. Imaginemos a situação na qual o cliente pretende gastar, no máximo, R$ 100,00 com esse plano de celular. Quantos minutos, no máximo, ele poderia falar?

Para resolver essa situação, teríamos que resolver uma inequação do 1.º grau, ou seja, $10+0{,}75\cdot x<100$.

Inequações do 1.º grau: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x)=ax+b$, chamamos inequação do 1.º grau toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das seguintes formas: $f(x)>0$; $f(x)<0$; $f(x)\geq 0$ ou $f(x)\leq 0$.

Na situação proposta, teríamos: $10+0{,}75x<100\Rightarrow 0{,}75x<90\Rightarrow x<120$. Dessa forma, o cliente teria que falar menos que 120 minutos mensais para pagar, no máximo, R$ 100,00.

Inequação produto e inequação quociente: Consideremos duas funções $f(x)$ e $g(x)$. Denominamos **inequação produto** as desigualdades do tipo:

$$f\cdot g>0;\ f\cdot g\geq 0;\ f\cdot g<0 \text{ e } f\cdot g\leq 0$$

Denominamos **inequação quociente** as desigualdades do tipo:

$$\frac{f}{g}>0;\ \frac{f}{g}\geq 0;\ \frac{f}{g}<0 \text{ e } \frac{f}{g}\leq 0$$

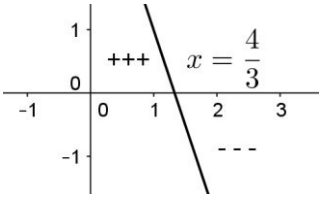
Exemplo: Resolver a inequação produto $(4-3x)\cdot(2x-7)>0$.

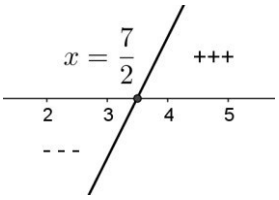
Inicialmente, devemos realizar o estudo do sinal de cada uma das funções, visto que isso influencia no sinal do produto:

i) Fazendo $f(x)=4-3x=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$, temos que o zero dessa função é $\frac{4}{3}$.

ii) Fazendo $g(x)=2x-7=0\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$, temos que o zero dessa função é $\frac{7}{2}$.

Assim, estudando o sinal para as duas funções temos:





Agora, analisando o sinal da inequação produto temos:

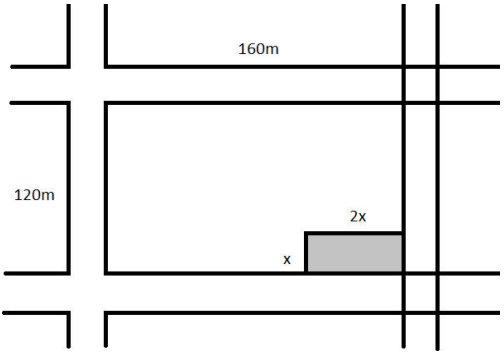
		$x = \frac{4}{3}$		$x = \frac{7}{2}$	
$f(x) = 4 - 3x$	+++		- - -		- - -
$g(x) = 2x - 7$	- - -		- - -		+++
$f(x).g(x)$	- - -		+++		- - -

Assim, a solução da inequação $(4-3x)\cdot(2x-7)>0$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{4}{3} < x < \frac{7}{2}\right\}$$

FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO DO 2.º GRAU

Situação-problema: Num loteamento, onde as quadras são retangulares, de dimensões 120 m por 160 m, serão vendidos lotes menores, com dimensões x por $2x$. Na figura, ao lado, representamos um desses lotes. Como podemos representar uma função que traduza a área da quadra restante, após a venda de um lote indicado na figura?



Esse tipo de função é denominada função quadrática ou função do 2.º grau.

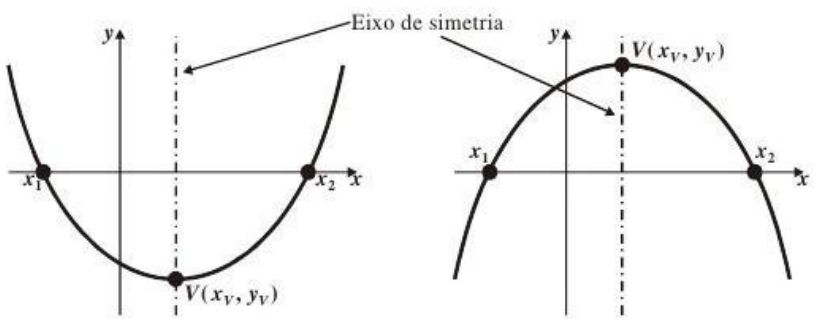
Função Quadrática: As funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=ax^2+bx+c$, com a, b e c reais com $a\neq 0$ são chamadas funções quadráticas. Os coeficientes dessa função são os números a, b e c reais.

Zeros (ou raízes) da Função Quadrática: Os zeros da função quadrática são os valores de x para os quais $f(x)=0$. Dessa forma, para resolver a equação $ax^2+bx+c=0$, usamos a Fórmula de Bháskara, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta=b^2-4ac.$

Dependendo do valor de Δ, podemos ter:

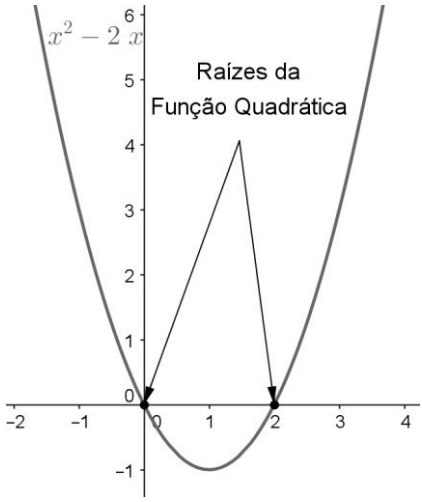
- $\Delta>0$, a função tem dois zeros reais e distintos;
- $\Delta=0$, a função tem dois zeros reais e iguais;
- $\Delta<0$, a função não tem zero real.

Observação: O gráfico da função é uma curva denominada parábola, que é uma curva simétrica, e o eixo de simetria passa no ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a};\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ denominado vértice da parábola.



Fonte: Disponível em: <http://pt.slideshare.net/faustofis/calclo-1-2-termo-de-papel-e-celulose>. Acesso em: 20 jun. 2015.

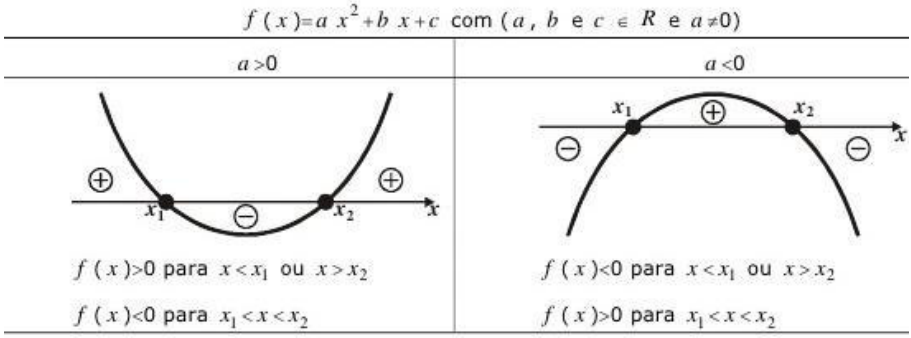
Exemplo: Seja a função $f(x)=x^2-2x$. Os zeros dessa função são os pontos de intersecção da parábola com o eixo-x, onde temos $f(x)=y=0$, ou seja, $x^2-2x=0$. Assim, temos $x=0$ ou $x=2$. Graficamente, temos:

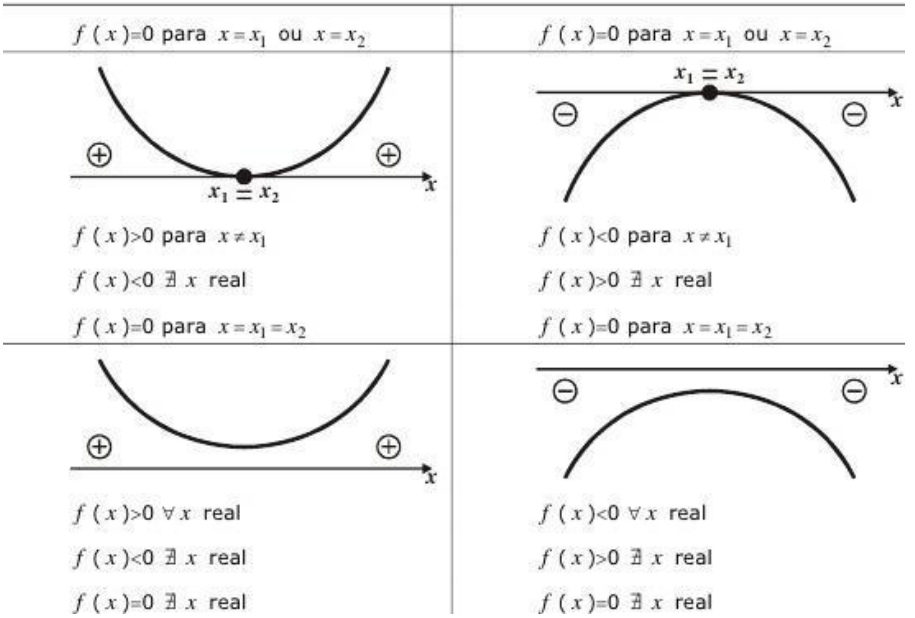


Faremos, agora, o estudo do sinal da função quadrática, considerando parâmetro $a \in \mathbb{R}$ e os zeros (ou raízes) da função.

Observamos, no exemplo anterior, que a função é positiva nos valores de x menores que zero (primeira raiz da função) e também para valores maiores que 2 (a outra raiz dessa função). Vemos ainda que a função é negativa entre essas raízes.

A tabela, a seguir, apresenta um resumo desse estudo do sinal da função quadrática:

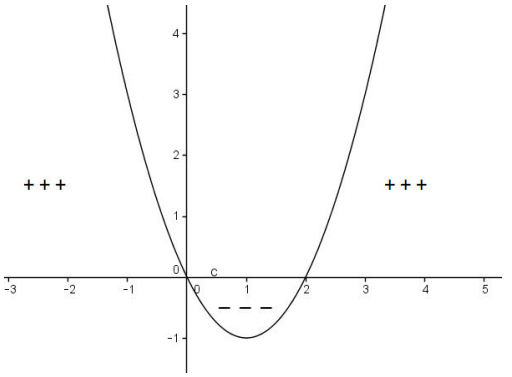




Fonte: Disponível em: <http://pt.slideshare.net/faustofis/calclo-1-2-termo-de-papel-e-celulose>. Acesso em: 20 jun. 2015.

Exemplo: Considerando a função $f(x)=x^2-2x$, temos que:

- $f(x)>0$: $x<0$ ou $x>2$
- $f(x)=0$: $x=0$ ou $x=2$
- $f(x)<0$: $0<x<2$



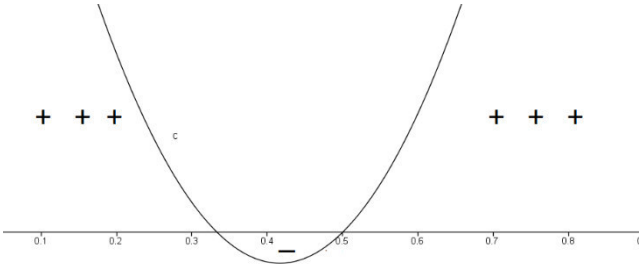
Inequações do 2º grau: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, uma função afim cuja lei de formação é dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, sendo a, b e $c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Chamamos inequação do 2.º grau, ou quadrática, à toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das seguintes formas: $f(x)>0$; $f(x)<0$; $f(x)\geq 0$ ou $f(x)\leq 0$.

Exemplo: Resolver a inequação $6x^2-5x+1\le 0$, considerando o conjunto dos números reais.

Resolução: Da equação $6x^2-5x+1=0$, temos os zeros da função quadrática em $x=\frac{1}{3}$ e $x=\frac{1}{2}$.

Fazendo o estudo do sinal da função, temos:

- $f(x)>0$: $x<\frac{1}{3}$ ou $x>\frac{1}{2}$
- $f(x)<0$: $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$



Assim, a solução da inequação $6x^2-5x+1=0$ é:

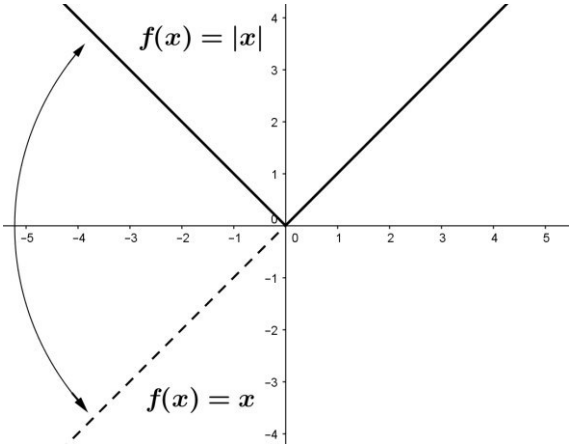
$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$$

Vamos, agora, tratar da função Modular.

Módulo: Definimos módulo de um número real x o qual denotamos por $|x|$, ao próprio número x, se ele for positivo ou nulo, e ao seu oposto, se ele for negativo. Desta forma, temos a seguinte definição: $|x|=\begin{cases} x, \text{ se } x\ge 0 \\ -x, \text{ se } x<0 \end{cases}$

Exemplo: $|3|=3$ e $|-4|=-(-4)=4$.

Função Modular: Chama-se função modular à toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=|x|$, a qual é definida por $f(x)=\begin{cases} x, \text{ se } x\geq 0 \\ -x, \text{ se } x<0 \end{cases}$.



Equação modular: São as equações nas quais consideramos módulos cujas leis envolvem as incógnitas.

Exemplo: Resolvera equação modular $|3x-1|=2$, considerando os números reais.

Resolução: Usando a definição da função modular, temos:

$$|3x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=2 \Leftrightarrow x=2 \\ -(3x-1)=2 \Leftrightarrow 3x-1=-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, temos a seguinte solução $S=\left\{-\frac{1}{3};\ 1\right\}$.

Inequação modular: São as inequações nas quais as incógnitas aparecem nos módulos.

Seja $k \in \mathbb{R}_+$ então: $\begin{cases} |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \\ |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \\ |x| > k \Leftrightarrow x < -k; x > k \\ |x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k; x \geq k \end{cases}$

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

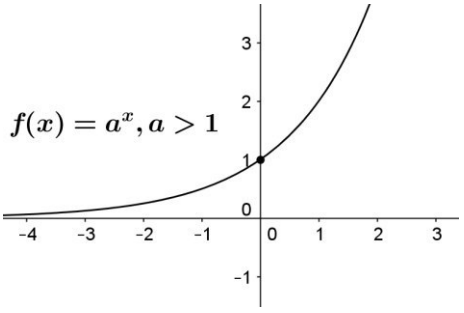
Situação problema: Uma pessoa aplicou R$ 1.000,00 em determinado fundo de investimento. Se o rendimento previsto nessa aplicação é de 10% ao mês, ao final do 4.º mês, que valor (montante) a pessoa irá resgatar? E ao final do enésimo mês?

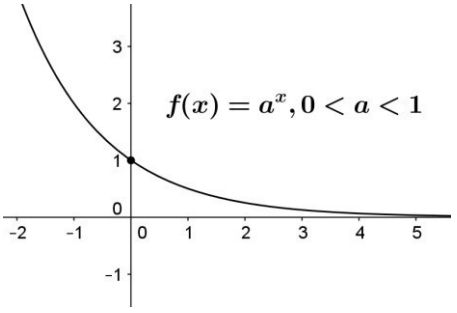
Para responder a essa questão, podemos recorrer a uma função que relaciona o montante (M) em função do mês (t): $M = 1000(1+i)^t$ (t), onde i é a taxa do investimento.

Esse tipo de função denominamos função exponencial.

Função Exponencial: Chama-se função exponencial à toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

O gráfico dessa função é denominado curva exponencial e depende do valor do parâmetro $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.





Equação Exponencial: É toda equação cuja incógnita está no expoente.

Observação: Essas equações satisfazem uma importante propriedade dada por:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ sendo } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Exemplo: Resolver a equação $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$, considerando os números reais.

Resolução: Vamos usar a propriedade dada na observação acima.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4.$$

Assim, a solução para essa equação exponencial é $S = \{-4\}$.

Inequação Exponencial: É toda desigualdade cuja incógnita está no expoente. Assim, temos:

- Se $a > 1$ temos que a função exponencial é crescente e então a propriedade fica expressa da seguinte forma: $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$;
- Se $0 < a < 1$ temos que a função exponencial é decrescente e então a propriedade será expressa da seguinte maneira: $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Função Logarítmica:

Situação problema: Uma pessoa aplicou R$ 1.000,00 em um investimento com rendimento de 10% ao ano. Depois de quanto tempo essa quantia irá dobrar?

Podemos representar essa situação por: $M = 2C$, com M sendo o montante e C o capital investido. Assim, temos:

$$M = 2C \Leftrightarrow C(1+i)^t = 2C \Leftrightarrow (1+i)^t = 2$$

Como $i = 10\% \Rightarrow i = 0{,}1$ temos a seguinte equação exponencial: $1{,}1^t = 2$.

Para resolver esse problema, teremos que usar uma função inversa da função exponencial. Essa função inversa é chamada de **Função Logaritmo**.

Vamos, então, definir primeiramente o **Logaritmo**.

Logaritmo: Seja $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$, onde $a \neq 1$ e, ainda, um dado $c \in \mathbb{R}$. A definição do logaritmo satisfaz a seguinte equação: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$. Os elementos da equação do logaritmo são:

- a é chamado base do logaritmo;
- b é o logaritmando e
- c é dito logaritmo.

Temos várias propriedades que decorrem da definição do Logaritmo. Vejamos algumas:

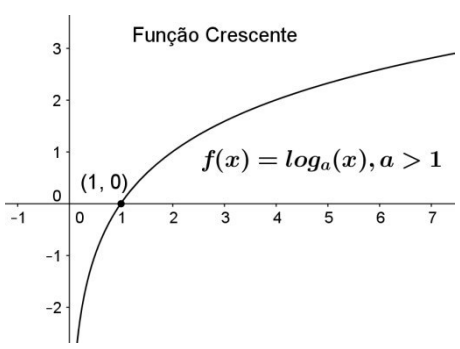
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a a^n = n$;
- $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$;
- $a^{\log_a b} = b$.

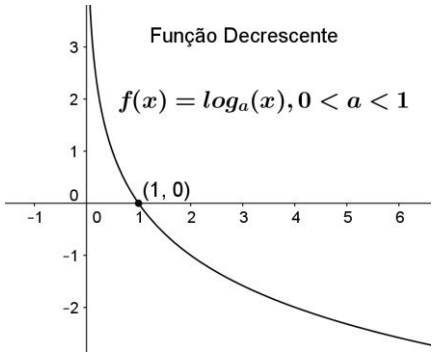
Propriedades Operatórias: Sendo $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+^*$, onde $a \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$, temos:

- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$;
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$;
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. A essa propriedade chamamos **Mudança de Base** no Logaritmo.

Função Logarítmica: É toda função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

O gráfico dessa função é uma curva denominada curva logarítmica.





Equação Logarítmica: É toda equação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos.

Exemplo: Resolva a equação $\log_2(3-x)=\log_2(3x+7)$ considerando os números reais.

Resolução: Como na equação temos a mesma base para o logaritmo, então, pela propriedade operatória descrita há pouco temos que:

$$(3-x)=(3x+7)\Leftrightarrow 4x=-4\Leftrightarrow x=-1$$

Assim, a solução da equação logarítmica é dada por $S=\{-1\}$.

Inequação Logarítmica: É toda inequação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos.

Propriedades operatórias:

- Se $a>1: x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.
- Se $0<a<1: x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

Exemplo: Resolva a inequação $\log_2(3-x)>\log_2(3x+7)$ considerando os números reais.

Resolução: Como na equação temos a mesma base maior que 1 para o logaritmo, então, pela primeira propriedade operatória descrita anteriormente temos que:

$$(3-x)>(3x+7)\Leftrightarrow 4x>-4\Leftrightarrow x>-1$$

Assim, a solução da equação logarítmica é dada por:

$$S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>-1\}.$$

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

5 ESTATÍSTICA DESCRITIVA, ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

ESTATÍSTICA: INTRODUÇÃO – CONCEITOS BÁSICOS

Em nosso dia a dia, estamos rodeados de informações obtidas por meios de estudos estatísticos. Por exemplo, para decidirmos em quem votar nas eleições podemos observar os resultados de pesquisas eleitorais sempre divulgadas; para decidir pelo lançamento de um novo produto, industriais costumam verificar, entre os consumidores, a aprovação desta mercadoria; entre outras situações. Mas como é que se dá este processo?

A princípio, há a necessidade de uma formalização da situação a ser estudada. Após, o pesquisador precisa verificar se ele terá acesso à população envolvida em sua pesquisa. Lembre-se que, em um estudo estatístico, *população* é o conjunto completo dos elementos que compõe o sistema em estudo.

Caso não tenha acesso à toda a população, precisará selecionar elementos desta que a represente para compor uma amostra. *Amostra* é, então, um subconjunto da população a ser estudada. Para a seleção desta amostra, existem algumas *técnicas de amostragem* que objetivam compor a amostra com elementos que melhor representem a população foco, procurando selecionar (em menor quantidade e de maneira proporcional se possível) os que possuam as principais características da população estudada. Estas técnicas limitam-se de acordo com o tempo disponível para a pesquisa, recursos financeiros, disponibilidade dos elementos que compõem a população e até pela acessibilidade a estes elementos.

Suponha, agora, que você queira conhecer o desempenho geral de sua sala de aula na disciplina de matemática e, também, quem possui melhor desempenho, se as meninas ou os meninos da sala. Para isso, vai em busca das notas obtidas por seus colegas e seu gênero. As informações coletadas estão apresentadas abaixo:

Gênero	Nota
Feminino	3,5
Masculino	5,0
Masculino	4,0
Masculino	2,0
Feminino	7,5
Masculino	2,0

Gênero	Nota
Feminino	7,0
Feminino	4,0
Masculino	5,0
Masculino	7,0
Masculino	1,5
Feminino	5,0

Gênero	Nota
Masculino	4,0
Feminino	5,0
Masculino	1,5
Feminino	7,0
Masculino	9,0
Masculino	5,0

Feminino	5,0	Feminino	3,0	Masculino	3,5
Feminino	4,0	Masculino	3,5	Feminino	2,0
Masculino	3,5	Feminino	7,5	Feminino	3,0
Masculino	5,0	Masculino	4,0	Masculino	4,0

Estas informações são chamadas, na Estatística, de *dados* e a que esses dados se referem são chamadas de *variáveis*. Em nossa situação, temos duas variáveis: gênero e nota. Os gêneros são classificados em duas categorias: feminino e masculino. Já a nota é um valor numérico que varia dentro do conjunto dos números reais. Ou seja, as variáveis que estamos trabalhando possuem características diferentes!

De maneira geral, as variáveis podem ser classificadas em:

- *variáveis qualitativas*: aquelas que apresentam como resposta uma qualidade ou uma preferência, sempre organizadas em categorias. São classificadas em:
  - nominais, onde as categorias não podem ser organizadas em ordem como, por exemplo, gênero, cor de cabelo, cor de olhos, etnia, religião e etc;
  - ordinais, que podem ser organizadas em ordem crescente ou decrescente com, por exemplo, grau de instrução, colocação no campeonato e etc.
- *variáveis quantitativas*: aquelas que apresentam como resposta um número real. Estas são obtidas por meio de contagens ou mensurações e classificadas em:
  - discretas, que assumem somente valores inteiros como, por exemplo, idade em anos, número de alunos por sala de aula, número elementos na família e etc;
  - contínuas, que assumem valores dentro de um intervalo dos números reais contínuo como, por exemplo, altura, peso, distância e etc.

Seguindo com o exemplo, o gênero é, então, uma variável qualitativa nominal e a nota (medida como apresentada), uma variável quantitativa contínua.

Veremos, a seguir, maneiras de organizar estes dados e de representá-los.

REPRESENTAÇÃO DOS DADOS

Ao querer conhecer o desempenho geral de sua sala de aula na disciplina de matemática, você coletou alguns dados:

Gênero	Nota
Feminino	3,5
Masculino	5,0
Masculino	4,0
Masculino	2,0
Feminino	7,5
Masculino	2,0
Feminino	5,0
Feminino	4,0
Masculino	3,5
Masculino	5,0

Gênero	Nota
Feminino	7,0
Feminino	4,0
Masculino	5,0
Masculino	7,0
Masculino	1,5
Feminino	5,0
Feminino	3,0
Masculino	3,5
Feminino	7,5
Masculino	4,0

Gênero	Nota
Masculino	4,0
Feminino	5,0
Masculino	1,5
Feminino	7,0
Masculino	9,0
Masculino	5,0
Masculino	3,5
Feminino	2,0
Feminino	3,0
Masculino	4,0

Precisamos, agora, organizar esses dados de maneira que possamos estudá-los.

Uma primeira forma de organização é a *tabela de frequências*, também conhecida como *distribuição de frequências*. Esta tabela é formada por duas colunas: a primeira composta pelos dados apresentados em ordem crescente e a segunda composta pela frequência do dado a que se refere, ou seja, o número de vezes que este aparece. Esta frequência dos dados é também chamada de *frequência absoluta*.

Considerando o gênero de seus colegas, temos a seguinte tabela de frequências:

Gênero	Frequência
Feminino	13
Masculino	17
Total	**30**

Já a tabela de frequências da variável "*notas dos alunos*" é:

Notas dos alunos	Frequência
1,5	2
2,0	3
3,0	2
3,5	4
4,0	6
5,0	7
7,0	3
7,5	2
9,0	1
Total	**30**

Os dados quantitativos, por poderem assumir valores dentro de um intervalo, também são organizados em *classes*, ou seja, intervalos contínuos de mesmos tamanhos (*amplitudes*). Sendo L_i o limitante inferior da classe e L_s o seu limitante superior, em geral, representamos esta por:

$$L_i \,|\!-\!- L_s,$$

ou seja, este intervalo é fechado em L_i e aberto em L_s.

Em cada classe, contabilizamos o número de elementos que estão inseridos nesta, ou seja, verificamos a frequência de cada classe. Por exemplo, podemos construir as seguintes classes de notas com amplitude de 2,0 pontos:

Classes de notas
0,0 |-- 2,0
2,0 |-- 4,0
4,0 |-- 6,0
6,0 |-- 8,0
8,0 |-- 10,0

A primeira classe possui limitante inferior 0,0 e limitante superior 2,0. Pela construção do intervalo, podemos inserir dados de 0,0 (inclusive) até o mais próximo possível de 2,0, porém este valor não é aceito. Das notas coletadas dos seus colegas, somente as duas notas 1,5 estão inseridas neste intervalo.

Já a segunda classe é limitada inferiormente por 2,0 e superiormente por 4,0, ou seja, nesta classe serão inseridos os dados de 2,0 (inclusive) até o mais próximo possível de 4,0, porém 4,0 não é aceito neste intervalo. Sendo assim, os dados:

Notas dos alunos	Frequência
2,0	3
3,0	2
3,5	4

estão na segunda classe, totalizando 9 dados.

Seguindo este raciocínio, construímos a seguinte tabela de classes:

Classes de notas	Frequência (f_i)
0,0 |-- 2,0	2
2,0 |-- 4,0	9
4,0 |-- 6,0	13
6,0 |-- 8,0	5
8,0 |-- 10,0	1
Total	**30**

Conseguimos, nesta tabela, ter uma visão geral das quantidades absolutas (frequência) de elementos em cada intervalo (classe), representada por f_i, sendo i o índice que representa a classe. Ou seja, f_1 é a frequência da primeira classe, f_2 é a frequência da segunda classe, e assim por diante. Porém, para a análise da variável em estudo, muitas vezes é mais interessante ter uma medida que leve em consideração o total de dados coletados para a amostra. Esta medida é a *frequência relativa*, definida como a razão entre a frequência absoluta da classe (f_i) e o número total de dados coletados para a amostra, que representaremos por n. Assim, a frequência relativa da classe i será calculada por:

$$fr_i = \frac{f_i}{n}.$$

Observe que, como a frequência da classe (f_i) é sempre menor ou igual ao total de dados da amostra (n), então a frequência relativa está sempre entre 0 e 1. Sendo assim, costumamos representar esta medida em porcentagem.

Completando nossa tabela de classes de notas com a frequência relativa das classes, temos:

Classes de notas	Frequência (f_i)	Frequência relativa (fr_i)
0,0 |-- 2,0	2	$\frac{2}{30} \cong 0{,}07 = 7\%$
2,0 |-- 4,0	9	$\frac{9}{30} \cong 0{,}30 = 30\%$
4,0 |-- 6,0	13	$\frac{13}{30} \cong 0{,}43 = 43\%$
6,0 |-- 8,0	5	$\frac{5}{30} \cong 0{,}17 = 17\%$
8,0 |-- 10,0	1	$\frac{1}{30} \cong 0{,}03 = 3\%$
Total	**30**	

Também podemos calcular a frequência relativa das categorias de variáveis qualitativas. Voltando ao dado "*gênero*", temos:

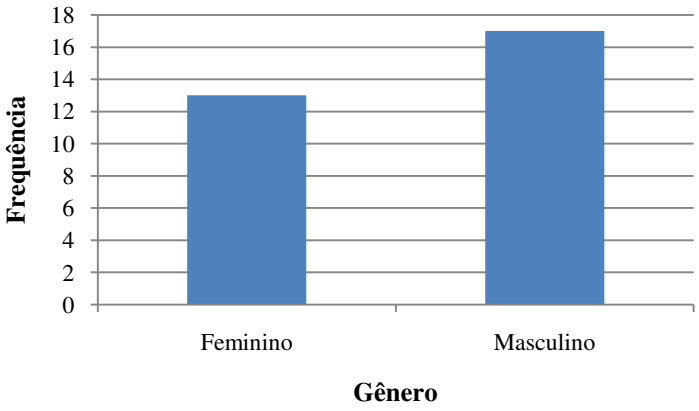
Gênero	Frequência	Frequência relativa
Feminino	13	$\frac{13}{30} \cong 0{,}43 = 43\%$
Masculino	17	$\frac{17}{30} \cong 0{,}57 = 57\%$
Total	**30**	

Além da tabela, outra forma de representarmos os dados é por gráficos como, por exemplo, o setograma e o gráfico de barras (utilizados para variáveis qualitativas) e também o histograma (usado para variáveis quantitativas). Veremos a construção desses gráficos a seguir.

Começando pelo *gráfico de barras*: este gráfico é construído sobre os eixos coordenados xOy, onde

- sobre o eixo das abscissas (eixo *x*), representamos as categorias da variável a ser representada; e
- sobre o eixo das ordenadas (eixo *y*), representamos a frequência absoluta ou a frequência relativa (apresentada na forma percentual ou não).

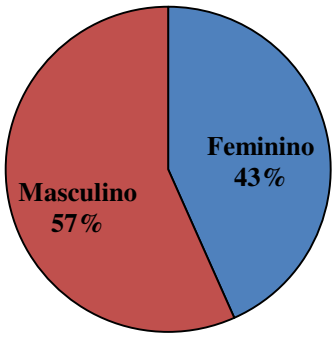
Para cada categoria, "subimos" uma coluna de altura tal que represente a frequência (absoluta ou relativa) desta. A tabela de frequências da variável "*gênero*" nos fornece o gráfico de barras a seguir.



Já o *setograma* ou *gráfico de setores* é um gráfico circular no qual cada setor representa uma categoria e possui tamanho proporcional a esta. Para isso, calculamos o ângulo do setor circular da categoria *i* por

$$\alpha = \frac{f_i}{n} \times 360^o = fr_i \times 360^o ,$$

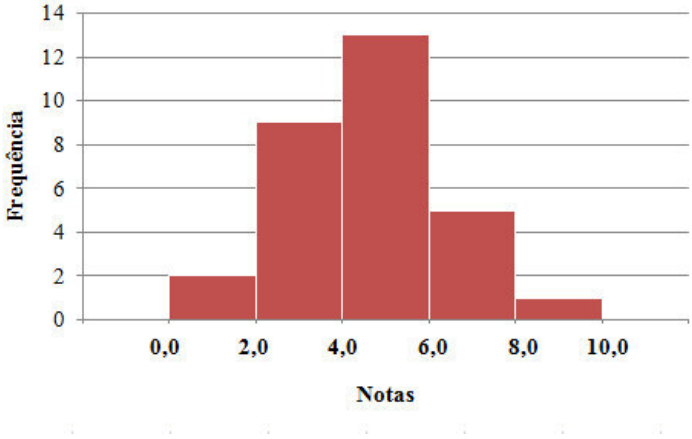
onde f_i é a frequência da categoria *i*, *n* é o número de elementos da amostra em estudo e fr_i é a frequência relativa à classe *i*. Representando a variável "*gênero*" por um setograma, temos:



Nos atendo agora à representação gráfica das variáveis quantitativas, temos o *histograma*: um gráfico também construído sobre os eixos coordenados xOy, onde

- sobre o eixo x, representamos as classes da variável a ser representada; e
- sobre o eixo y, representamos a frequência absoluta ou relativa (apresentada na forma percentual ou não) da referida classe.

Para cada classe, construímos uma coluna de base limitada pelos limitantes da classe e altura tal que represente a frequência (absoluta ou relativa) desta. A tabela de frequências da variável "*nota*" apresenta a nós o histograma que segue.

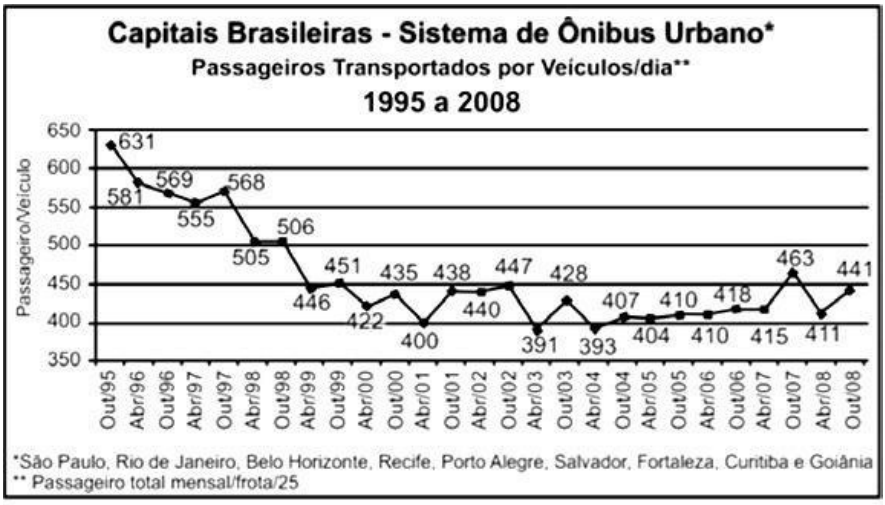


Outro gráfico apresentado sobre os eixos coordenados é o *gráfico de linhas*, onde no eixo x representamos a variável (qualitativa ou quantitativa) trabalhada e

no eixo *y* representamos suas quantidades (frequências), como podemos observar no exercício que resolveremos a seguir.

(ENEM – 2009) Dados da Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (ANTU) mostram que o número de passageiros transportados mensalmente nas principais regiões metropolitanas do país vem caindo sistematicamente. Eram 476,7 milhões de passageiros em 1995, e esse número caiu para 321,9 milhões em abril de 2001. Nesse período, o tamanho da frota de veículos mudou pouco, tendo no final de 2008 praticamente o mesmo tamanho que tinha em 2001.

O gráfico a seguir mostra um índice de produtividade utilizado pelas empresas do setor, que é a razão entre o total de passageiros transportados por dia e o tamanho da frota de veículos.



Disponível em: http://www.ntu.org.br. Acesso em 16 jul. 2009 (adaptado)

Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a

a) 355 milhões.

b) 400 milhões.

c) 426 milhões.

d) 441 milhões.

e) 477 milhões.

Ao ler o texto do exercício, coletamos as seguintes informações:

- em 1995 eram 476,7 milhões de passageiros
- e em abril de 2001 esse número caiu para 321,9 milhões.

Também, calculamos o *índice de produtividade* (*IP*) utilizado pelas empresas do setor de transportes por:

$$IP = \frac{PT}{NV},$$

sendo *PT* o total de passageiros transportados por dia e *NV* o tamanho da frota de veículos.

Considerando que o número de veículos utilizados nas frotas da empresa em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, pergunta-se sobre o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008.

Bom, para continuarmos esta resolução precisamos fazer uma leitura do gráfico, procurando informações que nos auxilie. Os dados passados no texto foram referentes aos períodos de abril de 2001 e outubro de 2008, verificamos no gráfico que

- o índice de produtividade em abril/2001 era igual a 400 passageiros transportados por veículo;
- o índice de produtividade em outubro/2008 era igual a 441 passageiros transportados por veículo.

Começando por abril de 2001, temos

$$IP = 400 \text{ passageiros/veículo} \quad \text{e} \quad PT = 321{,}9 \text{ milhões} = 321.900.000 \text{ passageiros,}$$

de onde calculamos um número total de

$$400 = \frac{321.900.000}{NV}$$

$$NV = \frac{321.900.000}{400} = 804.750 \text{ veículos.}$$

Como foi dito que o número de veículos utilizados nesses períodos foi o mesmo, o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi de

$$441 = \frac{PT}{804.750}$$

$$PT = 441 \times 804.750 = 354.894.750 \text{ passageiros},$$

ou seja, aproximadamente 355 milhões de passageiros. Concluímos, assim, que a alternativa ***a*** é a correta.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

✓ Média aritmética

Você já observou que, para ser aprovado em uma disciplina, suas notas nas avaliações do semestre são representadas por apenas uma medida? Essa medida, em geral, é a média aritmética das notas que você obteve no semestre. Assim, se houve duas avaliações P_1 e P_2 no seu semestre, calculamos a média das suas notas por:

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

Essa medida busca um equilíbrio entre suas duas notas. Suponha que, em um semestre, haja cinco avaliações (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) para uma dada disciplina. Para verificar sua aprovação, calculamos:

$$M = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{5}.$$

Raciocinando desta maneira, calculamos a média de n dados: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pelo quociente:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

e, por estarmos representando estes dados por x_i, então $\bar{x}$ representa sua média. Utilizando recursos matemáticos, podemos denotar a soma $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ por $\sum_{i=1}^{n} x_i$, sendo n a quantidade de dados apresentados de maneira isolada que

estamos estudando. Desta forma, o cálculo da média $\bar{x}$ de dados apresentados de forma isolada pode ser representada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Suponha, agora, que você queira conhecer o desempenho geral de sua sala de aula na disciplina de matemática e, para isso, vai em busca da média obtida pela sala. Dentre as 30 notas coletadas por você anteriormente, temos:

3,5	2,0	5,0	7,0	7,0	3,0	4,0	7,0	3,5	5,0
5,0	7,5	4,0	4,0	1,5	3,5	5,0	9,0	2,0	4,0
4,0	2,0	3,5	5,0	5,0	7,5	1,5	5,0	3,0	4,0

Bom, se você tem $n = 30$ dados e deseja calcular sua média, precisa somá-los e dividir este resultado pela quantidade de dados coletadas. Isto é,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{3{,}5 + 2{,}0 + 5{,}0 + 7{,}0 + 7{,}0 + \ldots + 5{,}0 + 3{,}0 + 4{,}0}{30} = \frac{133{,}0}{30} \cong 4{,}43.$$

E se esses dados forem apresentados em uma tabela de frequência? Ou seja, na forma:

Notas dos alunos	**Números de alunos (frequência)**
1,5	2
2,0	3
3,0	2
3,5	4
4,0	6
5,0	7
7,0	3
7,5	2
9,0	1
Total	**30**

Neste caso, continuamos com o mesmo número de elementos ($n = 30$) e, para calcularmos sua média, precisamos somar todas medidas e dividir este resultado pelo total (como feito anteriormente). Para facilitar nossos cálculos, podemos ir em busca das "somas parciais" desses dados, como apresentado abaixo:

Notas dos alunos	Números de alunos (frequência)	"somas parciais"
1,5	2	1,5 + 1,5 = 3,0
2,0	3	2,0 + 2,0 + 2,0 = 6,0
3,0	2	3,0 + 3,0 = 6,0
3,5	4	3,5 + 3,5 + 3,5 + 3,5 =14,0
4,0	6	4,0 + 4,0 + ... + 4,0 = 24,0
5,0	7	5,0 + 5,0 + ... + 5,0 = 35,0
7,0	3	7,0 + 7,0 + 7,0 = 21,0
7,5	2	7,5 + 7,5 = 15,0
9,0	1	9,0
Total	**30**	**133,0**

E, como já visto, a média será

$$\bar{x} = \frac{133,0}{30} \cong 4,43.$$

Note que o cálculo das "somas parciais" nada mais é que somar o dado x_i a quantidade de vezes que ele se repete ou, em outras palavras, é somar o dado x_i, f_i vezes:

Notas dos alunos (x_i)	Números de alunos (frequência f_i)	"somas parciais" ($x_i f_i$)
1,5	2	$1,5 \times 2 = 3,0$
2,0	3	$2,0 \times 3 = 6,0$
3,0	2	$3,0 \times 2 = 6,0$
3,5	4	$3,5 \times 4 = 14,0$
4,0	6	$4,0 \times 6 = 24,0$
5,0	7	$5,0 \times 7 = 35,0$
7,0	3	$7,0 \times 3 = 21,0$

7,5	2	$7,5\times 2=15,0$
9,0	1	$9,0\times 1=9,0$
Total	**30**	**133,0**

Sendo assim, podemos representar o cálculo da média aritmética para dados agrupados na forma:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i f_i)}{n}$$

onde N é o número de dados diferentes coletados. Apresentando novamente o cálculo da média para a tabela de frequência:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i f_i)}{n}=\frac{133,0}{30}\cong 4,43.$$

Em todos os casos, a média aritmética de um conjunto de medidas é uma medida que representa o centro da distribuição de dados em estudo e, por isso, esta medida é chamada de *medida de tendência central*. Porém, a média não é a única medida de tendência central. Existem também a *mediana* e a *moda*.

✓ Mediana

Vamos começar pela mediana! Organizando os dados coletados (em ordem crescente ou decrescente), a mediana é o valor que ocupa a posição central destes dados e o representamos por me.

Assim, para encontrarmos a mediana de

3,5	2,0	5,0	7,0	7,0	3,0	4,0	7,0	3,5

precisamos primeiro organizar estes dados:

2,0	3,0	3,5	3,5	4,0	5,0	7,0	7,0	7,0

Dos nove dados, somente um está na posição central: 4,0 e, portanto, $me=4,0$. Esta posição é a quinta.

Agora, trabalhando com a amostra:

3,5	2,0	5,0	7,0	7,0	3,0	4,0	7,0	3,5	5,0

e organizando-a:

2,0	3,0	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0	7,0	7,0	7,0

observamos que existem dois elementos centrais: 4,0 e 5,0, que ocupam a quinta e a sexta posições. Neste caso, a mediana é a média aritmética dos dois dados centrais:

$$me = \frac{4{,}0 + 5{,}0}{2} = 4{,}5.$$

Desses exemplos, notamos que, quando a amostra contém uma quantidade *n* ímpar de elementos, existe apenas um dado central que ocupa a posição

$$\frac{n+1}{2},$$

que já é a mediana *me*. Agora quando a amostra contém uma quantidade *n* par de elementos, existem dois elementos centrais que ocupam as posições

$$\frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{n}{2}+1$$

e a mediana *me* é a média aritmética desses dois dados.

- ✓ Moda

Vamos ver agora a última medida de tendência central que vamos estudar: a *moda*. Representada por *mo*, a moda será o elemento da amostra que possuir maior frequência. Por exemplo, a moda da amostra:

3,5	2,0	5,0	7,0	7,0	3,0	4,0	7,0	3,5	5,0

é o dado 7,0 pois possui a maior frequência entre estes elementos: 3. Assim, $mo = 7{,}0$.

Neste outro exemplo:

7,0	3,5	5,0	9,0	2,0	4,0	5,0	3,0	4,0

existem dois dados que possuem frequência igual a 2 e todos os outros apresentam-se somente uma vez. Neste caso, a amostra possui duas modas: 4,0 e 5,0. Este conjunto é chamado de *bimodal*.

Vamos ver como esse conteúdo se apresenta nos exercícios? Considere o seguinte enunciado:

(ENEM – 2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

a) $X = Y < Z$. b) $Z < X = Y$. c) $Y < Z < X$. d) $Z < X < Y$. e) $Z < Y < X$.

Para resolver este exercício, podemos começar calculando a média dos dados. Observe que ocorreram 5 partidas nas quais nenhum gol foi marcado; 3 partidas das quais somente um gol foi marcado; 4 partidas com dois gols; e assim por diante; totalizando 20 partidas. Sendo assim, para calcularmos a média de 20 dados, precisamos somar estes 20 dados e dividis por 20. Como estes dados estão agrupados em uma tabela de frequências, podemos trabalhar com as "somas parciais", como segue:

Gols marcados (x_i)	Quantidade de partidas (f_i)	"Somas parciais" ($x_i f_i$)
0	5	$0\times5=0$
1	3	$1\times3=3$
2	4	$2\times4=8$
3	3	$3\times3=9$
4	2	$4\times2=8$
5	2	$5\times2=10$
7	1	$7\times1=7$
Total	$n=20$	**45**

Sendo assim, a média de gols marcados é:

$$\bar{x}=\frac{\sum(x_i f_i)}{n}=\frac{45}{20}=2{,}25$$

Já para calcularmos a mediana, precisamos que os dados trabalhados (ou seja, "*gols marcados*") estejam ordenados em ordem crescente ou decrescente. Observando a tabela, estes dados já estão ordenados! Basta encontrarmos, então, o dado que se encontra na posição central destes dados. Sendo um total de 20 dados nesta amostra (ou seja, uma quantidade par de dados), existem dois elementos centrais, que se encontram nas posições:

$$\frac{n}{2}=\frac{20}{2}=10 \qquad \text{e} \qquad \frac{n}{2}+1=\frac{20}{2}+1=10+1=11.$$

Calculando a frequência acumulada dos dados, temos:

Gols marcados (x_i)	Quantidade de partidas (f_i)	Frequência acumulada
0	5	5
1	3	5 + 3 = 8
2	4	8 + 4 = 12
3	3	12 + 3 = 15
4	2	15 + 2 = 17
5	2	17 + 2 = 19

7	1	19 + 1 = 20
Total	$n = 20$	

Isso significa que

- o dado 0 ocupa da primeira à quinta posição;
- o dado 1 ocupa da sexta à oitava posição;
- o dado 2 ocupa da nona à décima segunda posição;
- o dado 3 ocupa da décima terceira à décima quinta posição;
- o dado 4 ocupa da décima sexta à décima sétima posição;
- o dado 5 ocupa da décima oitava à décima nona posição;
- o dado 7 ocupa a vigésima posição.

Ou seja, os dados que ocupam a 10ª e a 11ª posições são 2 e 2. Logo a mediana é:

$$me = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Finalizando, a moda é o dado com maior frequência, ou seja, $mo = 0$.

De acordo com o enunciado, representamos por X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda da distribuição dos gols. Ou seja,

$$\mathrm{X} = \bar{x} = 2{,}25 \qquad \mathrm{Y} = me = 2 \qquad \mathrm{Z} = mo = 0$$

e, portanto, obtemos $\mathrm{Z} < \mathrm{Y} < \mathrm{X}$ que identifica a alternativa **e** como correta.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Quando estudamos amostras, vamos em busca de medidas que as represente e as diferencie das demais amostras coletadas. Já vimos a média aritmética, a mediana e a moda, que são medidas de tendência central (aquelas que representam o centro da distribuição dos dados). Será que somente elas bastam para diferenciar amostras?

Observe os exemplos de amostras

Amostra 1				
1	3	5	7	9

Amostra 2				
3	4	5	6	7

Estas contém dados diferentes. Embora tenham a mesma quantidade de dados, estas amostra são diferentes. Porém, ao calcularmos as medidas de tendência central de cada amostra, temos:

- Amostra 1: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$ $md = 5$
  não há moda
- Amostra 2: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$ $md = 5$
  não há moda

Ou seja, amostras diferentes apresentam as mesmas medidas de tendência central! E como fazer para diferenciá-las?

Por isso a importância das medidas de dispersão. Estas são medidas que representam o quanto os dados da amostra estão disperso com respeito ao centro da distribuição de dados estudados.

Vamos estudar duas dessas medidas: a variância e o desvio padrão.

✓ Variância

A variância é uma medida de representação da dispersão dos dados amostrais com respeito ao centro da distribuição de dados, representado pela média aritmética da amostra ($\bar{x}$).

Considere como exemplo, os seguintes dados:

3,5	2,0	5,0	7,0	7,0	3,0	4,0	7,0	3,5

Neste caso, os dados estão apresentados de maneira isolada. Sendo assim, calculamos a variância por:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

ou seja, precisamos da média aritmética $\bar{x}$ dos dados para calcularmos a variância dos n dados x_i. Para facilitar nossos cálculos, vamos reorganizar nossa amostra como a seguir:

x_i
3,5
2,0
5,0
7,0
7,0
3,0
4,0
7,0
3,5

e, sendo $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9} = \frac{42}{9} \cong 4{,}67$, vamos calcular a parcela $(x_i - \bar{x})^2$ para cada dado x_i, como segue.

x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
3,5	$(3{,}5 - 4{,}67)^2 \cong 1{,}37$
2,0	$(2{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 7{,}13$
5,0	$(5{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 0{,}11$
7,0	$(7{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 5{,}43$
7,0	$(7{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 5{,}43$
3,0	$(3{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 2{,}79$
4,0	$(4{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 0{,}45$
7,0	$(7{,}0 - 4{,}67)^2 \cong 5{,}43$
3,5	$(3{,}5 - 4{,}67)^2 \cong 1{,}37$
Total	29,51

Portanto, a variância da amostra em estudo é

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{29{,}51}{9-1} \cong 3{,}69 .$$

E quando os dados são apresentados de forma agrupada? Neste caso, a variância é calculada por

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n-1}$$

onde N é o número de dados diferentes que temos.

Vejamos o exemplo abaixo.

Notas dos alunos (x_i)	Números de alunos (frequência f_i)
1,5	2
2,0	3
3,0	2
3,5	4
4,0	6
5,0	7
7,0	3
7,5	2
9,0	1
Total	**30**

Neste caso, para cada dado x_i, calculamos a parcela $(x_i - \bar{x})^2 f_i$. Sabendo que a média $\bar{x}$ é aproximadamente 4,43, seguem os cálculos.

Notas dos alunos (x_i)	Números de alunos (frequência f_i)	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
1,5	2	$(1{,}5 - 4{,}43)^2 \times 2 = 17{,}17$
2,0	3	$(2{,}0 - 4{,}43)^2 \times 3 = 17{,}71$
3,0	2	$(3{,}0 - 4{,}43)^2 \times 2 = 4{,}09$
3,5	4	$(3{,}5 - 4{,}43)^2 \times 4 = 3{,}46$
4,0	6	$(4{,}0 - 4{,}43)^2 \times 6 = 1{,}11$

5,0	7	$(5{,}0-4{,}43)^2\times 7=2{,}27$
7,0	3	$(7{,}0-4{,}43)^2\times 3=19{,}81$
7,5	2	$(7{,}5-4{,}43)^2\times 2=18{,}85$
9,0	1	$(9{,}0-4{,}43)^2\times 1=20{,}88$
Total	**30**	**105,35**

Assim, a variância da amostra é

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2 f_i}{n-1}=\frac{105{,}35}{30-1}\cong 3{,}63.$$

✓ Desvio padrão

Além da variância, outra medida que representa o quanto os dados amostrais estão dispersos em relação ao centro da distribuição é o desvio padrão, definido como a raiz quadrada positiva da variância. Ou seja, se for apresentado os *n* dados da amostra de maneira isolada, calculamos o desvio padrão *s* por

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}.$$

Já se os dados forem apresentados de forma agrupada, usamos:

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 f_i}{n-1}}$$

Para esses cálculos, fica mais fácil calcularmos anteriormente a variância da amostra e, em seguida, calcularmos o seu desvio padrão. Voltando aos exemplos anteriores, sabemos que a variância da amostra

3,5	2,0	5,0	7,0	7,0	3,0	4,0	7,0	3,5

é $s^2=3{,}69$. Seu desvio padrão é, então,

$$s=\sqrt{3{,}69}\cong 1{,}92.$$

Já no exemplo seguinte

Notas dos alunos (x_i)	**Números de alunos (frequência** f_i)
1,5	2
2,0	3
3,0	2
3,5	4
4,0	6
5,0	7
7,0	3
7,5	2
9,0	1
Total	**30**

encontramos a variância das notas igual a $s^2 = 3{,}63$. Portanto, o desvio padrão dessas notas é

$$s = \sqrt{3{,}63} \cong 1{,}90.$$

Vamos fazer, agora, o uso desse conteúdo no seguinte exercício:

(ENEM – 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d) Paulo, pois obteve maior mediana.
e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Bom, para a classificação de Marco e Paulo no concurso, esses candidatos deveriam obter média aritmética na pontuação das três disciplinas igual ou superior a 14. Observando as médias obtidas por ambos, temos nota 15 (superior à pontuação mínima) e, portanto, somente a média não basta como medida de classificação deles, pois ocorreu empate. Neste caso, o desempate seria em favor da pontuação mais regular, ou seja, a pontuação que possui menor variabilidade.

Retomando nosso conteúdo, sabemos que as medidas que representam a variação dos dados amostrais são as medidas de variação: variância e desvio padrão. Lembrando que, quanto maior a variação dos dados amostrais, maior serão a variância e o desvio padrão. Analogamente, quanto menor a variação dos dados, menor serão essas medidas. Aqui temos os desvios padrões das notas dos dois candidatos e o candidato que possui pontuação mais regular é, portanto, o que possui menor desvio padrão. Podemos notar que este fato ocorre com o Marco e, assim, concluímos que a resposta correta é a alternativa **b**.

NOÇÕES DE PROBABILIDADE

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre probabilidade, faremos um breve estudo de Fatorial e Análise Combinatória, a parte da Matemática que abrange a contagem de elementos de um conjunto agrupado sob especificidades particulares.

FATORIAL

Um conceito importante para nossos próximos estudos é o *fatorial*.

Dado um número natural n, calcula-se seu fatorial pelo produto de n com seus antecessores, até o número 1. Ou seja, representando o fatorial de n por $n!$ (lê-se: n fatorial), temos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \qquad n \in \mathrm{IN}.$$

Por exemplo, o fatorial de 6 é

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Da mesma forma, o fatorial de 20 é calculado por

$$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em particular, temos que o fatorial de 1 é ele mesmo $(1! = 1)$ e defini-se o fatorial de *zero* (0!) pelo valor 1.

É importante perceber a diferença entre $(n-k)!$ e $n! - k!$, pois considerando, como exemplo, $n = 6$ e $k = 4$ temos:

$$(6-4)! = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

e, lembrando que $6! = 720$ e $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ então:

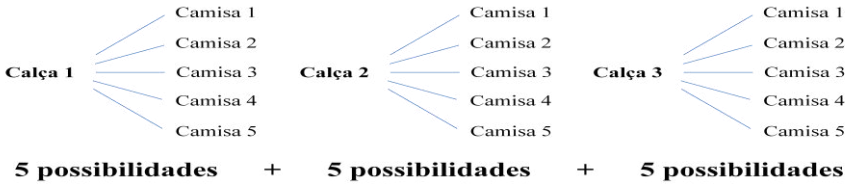
$$6! - 4! = 720 - 24 = 696.$$

Ou seja, $(6-4)!$ é diferente de $6! - 4!$.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem configura-se numa ferramenta essencial em diversas áreas, utilizando a multiplicação como artifício principal.

Para entender seus processos, suponha que você precise se arrumar e tem disponíveis três calças e cinco camisas. Quantas maneiras diferentes são possíveis? Observe o diagrama a seguir:



Você pode escolher a primeira calça e qualquer uma das cinco camisas, formando cinco possibilidades. Ou pode escolher a segunda calça e (também) qualquer uma das cinco camisas, totalizando mais cinco possibilidades. Ou, por fim, pode escolher a última calça, também totalizando mais cinco possibilidades. Portanto, para as três calças e as cinco camisas, você tem 15 possibilidades de escolha.

Em geral, pensamos:

3 calças × 5 camisas = 15 possibilidades.

Fazendo uso desse conteúdo, vamos resolver o seguinte exercício:

(FUVEST – 2015 – Adaptada) Um "alfabeto minimalista" é constituído por apenas dois símbolos, representados por * e #. Uma palavra de comprimento *n*, $n \geq 1$, é formada por *n* escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, # é uma palavra de comprimento 1 e #**# é uma palavra de comprimento 4. Usando esse alfabeto minimalista, quantas palavras de comprimento menor que 6 podem ser formadas?

Palavras com comprimento menor que 6 são palavras com comprimentos: 1, 2, 3, 4 ou 5. Para cada comprimento de palavras solicitadas, teremos:

Comprimento 1: $2 = 2^1 = 2$

Comprimento 2: $2 \times 2 = 2^2 = 4$

Comprimento 3: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

Comprimento 4: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$

Comprimento 5: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

Logo, são formadas $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$ palavras de comprimento menor que 6.

Mais um exemplo:

(UNICAMP – 2013) Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado na figura.

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria:

a) inferior ao dobro.

b) superior ao dobro e inferior ao triplo.

c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.

d) mais que o quádruplo.

Na primeira situação, têm-se 3 letras e 4 algarismos e o total de possibilidades é

$$26\times\underbrace{26\times26\times10}_{letras}\times\underbrace{10\times10\times10}_{algarismos}=26^3\times10^4$$

Já na segunda situação, 4 letras e 3 algarismos, totalizando

$$26\times\underbrace{26\times26\times26\times10}_{letras}\times\underbrace{10\times10}_{algarismos}=26^4\times10^3$$

Portanto, a razão entre os dois valores é:

$$\frac{26^4\times10^3}{26^3\times10^4}=\frac{26}{10}=2{,}6\,,$$

ou seja, o aumento seria de $2{,}6-1=1{,}6$, que é inferior ao dobro do número máximo de placas em vigor.

Assim, a alternativa correta é a letra **a**.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Suponha, neste momento, que você e mais dois colegas precisem se organizar em três cargos: presidência, vice-presidência e tesouraria. Como cada indivíduo não pode ocupar mais de um cargo, podemos pensar:

$$\frac{\text{3 pessoas disponíveis}}{\text{Presidente}}\times\frac{\text{2 pessoas disponíveis}}{\text{Vice-Presidente}}\times\frac{\text{1 pessoa disponível}}{\text{Tesoureiro}}=6\text{ possibilidades}$$

Ou seja, para o primeiro cargo há 3 pessoas disponíveis para ocupá-lo, e para o segundo cargo restam 2 pessoas e para o terceiro cargo, somente uma pessoa restante. Neste caso, estamos dizemos que estamos permutando 3 elementos e calculamos

$$P_3=3\cdot2\cdot1=3!=6\,.$$

Portanto, existem 6 possibilidades de permutar você e seus dois colegas entre os três cargos existentes.

O conceito de permutação advém do próprio nome: trata-se do cálculo de todas as "trocas" de posições entre *n* elementos, levando-se em conta sua posição e ordem. Calcula-se por

$$P_n = n!.$$

Outro exemplo de permutação: qual o total de anagramas da palavra PERMUTA? Como esta palavra possui 7 letras, sem nenhuma letra repetida, concluímos que existem

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

anagramas diferentes.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÕES

E se quisermos calcular a quantidade de anagramas da palavra BANANA? Observe que, nesta palavra, a letra **A** repete-se 3 vezes e a letra **N** repete-se 2 vezes. Neste caso, as permutas entre as letras **A** e entre as letras **N** devem ser desconsideradas. Assim, há

$${}^{3,2}P_6 = \frac{6!}{3!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 1} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 1} = 6\cdot 5\cdot 2 = 60$$

possibilidades de anagramas da palavra *banana*.

Quando há repetição de elementos, deve-se usar a expressão:

$${}^{a,b,c,\ldots}P_n = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot \ldots}$$

sendo n o total de elementos, a a quantidade de repetições de um dos elementos, b a quantidade de repetições de outro elemento, c a quantidade de outro, e assim sucessivamente.

ARRANJO

Suponha, agora, que haja a necessidade organizar, entre 10 pessoas, uma comissão que contenha um cargo para presidência, um para vice-presidente e um para tesoureiro. Lembrando que cada indivíduo não pode ocupar mais de um cargo, podemos pensar:

$$\frac{\text{10 pessoas}}{\text{Presidente}} \times \frac{\text{9 pessoas}}{\text{Vice-Presidente}} \times \frac{\text{8 pessoas}}{\text{Tesoureiro}} = 720 \text{ possibilidades}$$

Ou seja,

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{7!} = \frac{10!}{(10-3)!}.$$

Dizemos, nesse caso, que estamos *arranjando 3 elementos em um conjunto de* 10 e calculamos de maneira direta:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

De maneira geral, existem situações em que é necessário escolher k elementos de um conjunto de n elementos e dispô-los em *ordem*. Para tais situações, utilizamos o conceito de arranjo, calculado por:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

COMBINAÇÃO SIMPLES

Como raciocínio inicial, suponha que de um grupo de cinco pessoas, duas precisam ser selecionadas para atuar como tesoureiros de uma festa beneficente. Neste caso, as duas pessoas serão selecionadas para desempenhar o mesmo papel e, portanto, não há a preocupação com a ordem em que estes estão dispostos. Considerando as pessoas: *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, as possibilidades são:

A e *B* *A* e *C* *A* e *D* *A* e *E*

B e *C* *B* e *D* *B* e *E*

C e *D* *C* e *E*

D e *E*

Ou seja, existem 10 formas de combinarmos 2 pessoas dentre 5.

E se for preciso combinar 2 pessoas dentre 20? Ou 5 elementos dentre 100? Para a combinação k elementos dentre n, utilizamos:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

lembrando que, neste caso, não importa a ordem dos k elementos selecionados.

Voltando ao exemplo inicial, isto é, a combinação de 2 dentre 5 pessoas para os cargos de tesouraria, calculamos:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 5\cdot 2 = 10.$$

Como aplicação deste conceito, considere o seguinte exercício:

(UNESP – 2013) Quantos são os números naturais que podem ser decompostos em um produto de quatro fatores primos, positivos e distintos, considerando que os quatro sejam menores que 30?

Os números primos menores que 30 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Logo, precisamos multiplicar quatro dentre estes 10 números primos, sem repeti-los. Como o produto de números reais é comutativo (ou seja, não importa a ordem em que os elementos são multiplicados, o seu resultado será o mesmo), basta combinar 4 dentre estes 10 elementos. Portanto existem

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$$

números naturais que podem ser decompostos em um produto de quatro fatores primos, menores que 30, distintos.

PROBABILIDADE

Em geral, ao conhecer um professor, uma curiosidade que surge é "será que é difícil passar na disciplina com ele?!". Não é? E se este mesmo professor apresenta-se a sua sala de aula dizendo: "Costumo ter 80% de aprovação na minha disciplina!". O que isso significa?

Podemos pensar da seguinte forma: 80, a cada 100 alunos, são aprovados. Equivalente a 40 alunos aprovados, num grupo de 50. Ou ainda, 20 aprovados, a cada 25 alunos. Também, 4 alunos aprovados a cada grupo de 5. Ou seja:

$$80\% = \frac{80}{100} = \frac{40}{50} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Todas as razões acima são equivalentes e, portanto, podem ser representadas igualmente pela porcentagem: 80%. Independente da forma em que fazemos esta leitura, temos: dentre um grupo maior, certa quantidade possui uma característica. Isto é, dentre 100 alunos, 80 são aprovados. Ou dentre 25 alunos, 20 são aprovados. E assim por diante. É assim que devemos pensar na probabilidade:

dentre um grupo de elementos, certa quantidade possui a característica em estudo. Bom, para conseguirmos formalizar este conceito, precisamos então de outros conceitos mais básicos.

Dado um experimento a ser estudado, chamamos de *ponto amostral* cada possível resultado que podemos obter e o conjunto de todos os possíveis pontos amostrais chamamos de *espaço amostral*. Este conjunto será sempre representado por *S*.

Tomando como exemplo o experimento "*lançamento de um dado de seis faces*", os resultados: 1, 2, 3, 4, 5, 6 são os pontos amostrais que podemos ter e o espaço amostral é, então,

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Dentro de um espaço amostral, podemos querer estudar a possibilidade de alguma característica ocorrer. Por exemplo, no lançamento do dado de seis faces, podemos estudar a possibilidade de sair uma face par ou podemos querer estudar a possibilidade de sair uma face maior que quatro. Cada característica dentro do espaço amostral limita este a um subconjunto de seus pontos amostrais. Este subconjunto é chamado de *evento* e é representado por qualquer letra maiúscula, diferente de *S*. Assim, definindo o evento

E: sair um número par,

temos o conjunto

$$E = \{2,4,6\}.$$

Da mesma forma, definindo o evento

F: sair um número maior que quatro,

obtemos

$$F = \{5,6\}.$$

Sendo os eventos conjuntos, podemos operá-los:

- **Evento União ($E \cup F$)**

Este evento é composto pelos pontos amostrais do espaço amostral *S* que estão em pelo menos um dos eventos, podendo este ponto amostral ser comum a ambos eventos. Sendo os eventos

E: sair um número par e *F*: sair um número maior que quatro,

o evento união destes será

$$E \cup F = \{2,4,5,6\}.$$

- **Evento Interseção ($E \cap F$)**

Este evento contém os pontos amostrais do espaço amostral *S* que estão obrigatoriamente contido em ambos eventos. Voltando aos eventos

E: sair um número par e *F*: sair um número maior que quatro,

o evento interseção destes é, então,

$$E \cap F = \{6\}.$$

- **Evento Complementar ($\overline{E}$ ou E^c)**

Este evento é composto por todos os pontos amostrais do espaço amostral *S* que não estão no evento em estudo. Assim, o evento complementar ao evento

E: sair um número par

é

$$\overline{E} = \{1,3,5\}.$$

Ou seja, o evento complementar ao evento "*sair um número par*" é "*sair um número ímpar*".

Definimos assim a probabilidade do evento *E*, denotado por $P(E)$, pelo quociente

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)},$$

sendo $n(E)$ o número de elementos do evento E e $n(S)$ o número de elementos do espaço amostral, S não vazio.

Do exemplo do lançamento de um dado de seis faces, podemos calcular a probabilidade de sair um número par. Sendo o evento

E: sair um número par e $n(E) = 3$

então

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}50=50\%\,.$$

Também a probabilidade de sair um número maior que quatro é

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cong 0{,}3333=33{,}33\%\,,$$

onde F é o evento "*sair um número maior que quatro*".

Da definição de probabilidade, podemos notar que:

$$P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=1\,,$$

para qualquer espaço amostral em estudo. Por isso, chamamos o espaço amostral S de evento certo. Também,

$$P(\emptyset)=\frac{n(\emptyset)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

sendo $\emptyset$ o conjunto vazio, ou seja, o conjunto composto por nenhum elemento. Por este motivo, chamamos $\emptyset$ de evento impossível.

Agora, considerando E e F dois eventos quaisquer de um espaço amostral S não vazio, temos as seguintes propriedades:

- $0\le P(E)\le 1$
- $P(\overline{E})=1-P(E)$
- $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$
- Somente se $E\cap F=\emptyset$ chamamos estes de *eventos mutuamente exclusivos* e

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)$$

Para exemplificarmos essas propriedades, podemos ir em busca de:

1. no lançamento de um dado de seis faces, a probabilidade de sair um número que não seja par.

   Considerando o evento

E: sair um número par,

queremos aqui a probabilidade de sair um número ***não*** par, ou seja, queremos a probabilidade do evento complementar $\overline{E}$. Utilizando a propriedade,

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. no lançamento de um dado de seis faces, a probabilidade de sair um número par ou um número maior que quatro.

   Para os eventos

   E: sair um número par e *F*: sair um número maior que quatro,

queremos a probabilidade de sair um número par ***ou*** um número maior que quatro. Neste caso, queremos a probabilidade do evento união $E \cup F$. Utilizando a propriedade,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3. no lançamento de um dado de seis faces, a probabilidade de sair um número menor que três ou um número maior que quatro.

   Agora, para os eventos

   F: sair um número maior que quatro e *G*: sair um número menor que três,

queremos a probabilidade de sair um número menor que três ***ou*** um número maior que quatro. Neste caso, queremos a probabilidade do evento união $G \cup F$. Note que os eventos *F* e *G* são mutuamente exclusivos. Ou seja, se o evento *F* ocorrer, o evento *G* não ocorrerá. Da mesma forma, se o evento *G* ocorrer, o evento *F* não acontece. Assim, utilizando a propriedade,

$$P(G \cup F) = P(G) + P(F) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Para estes exemplos poderíamos ter trabalhado direto com os pontos amostrais do espaço amostral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$? Claro que sim! Estes exemplos são simples e foram utilizados somente para a sua fácil visualização. Porém em

muitos casos podemos não conhecer os pontos amostrais do experimento em estudo. Neste caso fica mais fácil o uso dessas propriedades.

Ainda trabalhando com probabilidade, definimos a *probabilidade de um evento* F , *condicionada ao evento* E *ocorrer*, pelo quociente

$$P(F/E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}.$$

Por exemplo, podemos calcular a probabilidade de, no lançamento de um dado se seis faces, sair um número maior que quatro sabendo que este número é par. Considerando os eventos

E: sair um número par e *F*: sair um número maior que quatro,

temos

$$E=\{2,4,6\} \quad \text{e} \quad F=\{5,6\}.$$

Assim,

$$F\cap E=\{6\}$$

e, então, a probabilidade de, dentre os números pares, sair um número maior que quarto é

$$P(F/E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1\times 6}{3\times 6}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.$$

Finalizando nossos estudos de probabilidade, vamos estudar *eventos independentes*. Para isso, considere E e F eventos quaisquer de um espaço amostral S não vazio. Dizemos que E e F são eventos independentes e, e somente se,

$$P(E/F)=P(E) \quad \text{e} \quad P(F/E)=P(F).$$

Somente neste caso, ou seja, dos eventos E e F serem independentes, temos: $P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)$.

Como exemplo, podemos tomar o lançamento de dois dados de seis faces. Neste experimento, podemos querer estudar a probabilidade de sair um número par em ambos os dados. Lembrando que o resultado do lançamento do primeiro

dado não interfere no resultado do lançamento do segundo dado, temos que os eventos

E_1: sair número par no primeiro dado;

E_2: sair número par no segundo dado,

são independentes. Sendo assim, podemos ler

"*a probabilidade de sair um número par em ambos os dados*"

por

"*a probabilidade de sair um número par no primeiro dado* **e** *no segundo dado*"

o que traduzimos por

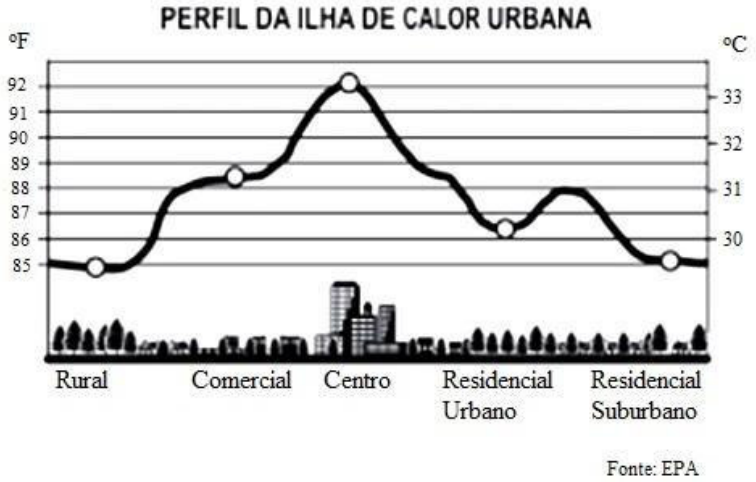
$$P(E_1 \cap E_2).$$

Como os eventos em estudo são independentes,

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

E como esses conteúdos são trabalhados em exercícios? Abaixo seguem três questões para resolvermos.

Questão 1. (ENEM – 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

Bom, para Rafael mudar-se para outra região (que não o Centro, onde mora atualmente), as possíveis escolhas dele são as regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. Ou seja, há quatro possibilidades de locais para ele morar. Dentro do conteúdo de probabilidade, isso significa que o espaço amostral dele é composto pelas regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano, e, então, o número de elementos no espaço amostral em questão é

$$n(S)=4.$$

Porém, dentro desse espaço amostral, segundo recomendações médias, o ideal é que ele more em uma região com temperaturas inferiores a 31°C. Observando o gráfico, notamos que somente a região Comercial não possui essa característica. Sendo assim, definindo o evento:

E: região com temperaturas inferiores a 31°C,

temos $E=\{\text{Rural, Residencial Urbano, Residencial Suburbano}\}$ e, portanto,

$$n(E)=3.$$

Calculando, então, a probabilidade de Rafael escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{3}{4},$$

o que nos leva à alternativa **e.**

Esta questão 1 somente solicitou que nós soubéssemos o conceito de probabilidade para ser resolvido. E quanto à probabilidade condicionada e aos eventos independentes? Vamos seguir resolvendo as questões 2 e 3.

Questão 2. (ENEM – 2014) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	**Doença A**	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. **Epidemiologia: abordagem prática.** São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

a) 47,5%.b) 85,0%. c) 86,3%. d) 94,4%. e) 95,0%.

Para resolver este exercício, precisamos entender como se calcula a sensibilidade para uma doença. Conforme apresentado no enunciado, sensibilidade é definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença. Note que, neste caso estamos trabalhando com duas informações distintas sobre os pacientes:

1º: resultado do teste do paciente: positivo ou negativo;
2º: o paciente possuir ou não a doença.

Cada uma dessas informações gera um evento diferente no nosso estudo probabilístico:

E: o resultado do teste do paciente é positivo e *F*: o paciente possui a doença.

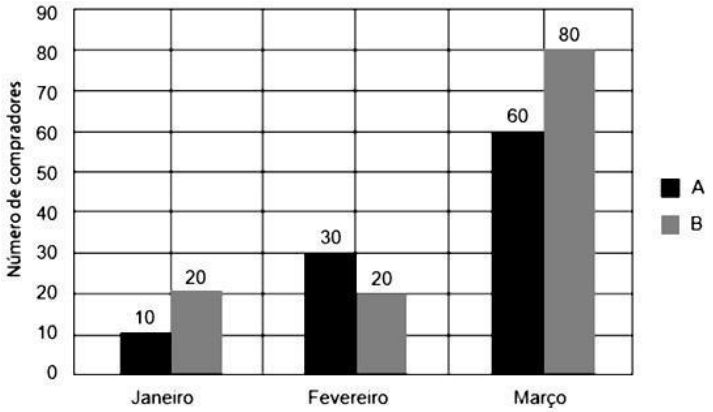
Da definição de sensibilidade, podemos observar também que, para o seu cálculo, não consideramos todos os resultados do espaço amostral apresentado, mas somente os resultados que respeitam uma característica: o paciente estar com a doença. Ou seja, temos uma condição sobre os resultados coletados! Por isso, trabalhamos com a probabilidade condicionada.

Ler: "*a sensibilidade é definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença*", significa dizer que *a sensibilidade é definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO, condicionada ao fato do paciente estar com a doença*. Queremos, então, aplicando este conceito à doença A,

$$P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{n(E\cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}}=\frac{\frac{95}{200}}{\frac{100}{200}}=\frac{95}{100}=0{,}95=95\%\,.$$

Portanto a resposta correta é a alternativa **e**.

Questão 3. (ENEM – 2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{3}{242}$ c) $\frac{5}{22}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{7}{15}$

Nesta questão, a pergunta feita é: "*Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?*". Note que são dois indivíduos pertencentes a dois grupos distintos que serão sorteados: o grupo dos indivíduos que compraram o produto A e o grupo dos que compraram o produto B. Esta pergunta pode, então, ser lida da seguinte forma: "*Qual a probabilidade de que o sorteado comprador do produto A tenha feito compras em fevereiro de 2012* ***e*** *que o sorteado comprador do produto B tenha feito compras em fevereiro de 2012?*".

Definindo, assim, os eventos

E: ser sorteado comprador do produto A que tenha feito compras em fevereiro de 2012;

F: ser sorteado comprador do produto B que tenha feito compras em fevereiro de 2012,

queremos calcular $P(E \cap F)$. Note que, ser sorteado comprador do produto A que tenha feito compras em fevereiro de 2012 não interfere no fato de o sorteado que comprou o produto B tenha feito compras em fevereiro de 2012. Da mesma forma, sortear um comprador do produto B que tenha feito compras em fevereiro de 2012 não interfere que o indivíduo sorteado que comprou o produto B tenha

feito compras em fevereiro de 2012. Ou seja, os eventos *E* e *F* são independentes! Sendo assim, $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.

Vamos, agora, em busca de calcular $P(E)$ e $P(F)$. Comecemos pelo evento *E*. A probabilidade deste evento será $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$, onde $n(E)$ é quantidade de elementos que comprou o produto A em fevereiro de 2012 e $n(S)$ é o total de elementos que comprou o produto A. Observando o gráfico, temos que

$$n(E) = 30 \quad \text{e} \quad n(S) = 10 + 30 + 60 = 100,$$

e, portanto, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

Da mesma forma, a probabilidade de *F* será $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$, onde $n(F)$ é quantidade de elementos que comprou o produto B em fevereiro de 2012 e $n(S)$ é o total de elementos que comprou o produto B. Do gráfico, observamos que

$$n(F) = 20 \quad \text{e} \quad n(S) = 20 + 20 + 80 = 120,$$

e, portanto, $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Voltando à questão inicial, a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012 é, então,

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

Portanto, a resposta correta é a alternativa **a.**

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

6 GEOMETRIA PLANA

O estudo da geometria iniciou-se com a observação da natureza e o estabelecimento de relações envolvendo espaço e formas. Os conhecimentos geométricos foram usados em muitas aplicações práticas, no mundo antigo, como marcações de terrenos, otimização de plantações e desenho de construções diversas, como as pirâmides do Egito.

A geometria sempre foi considerada uma ciência aplicada, cujas descobertas foram empregadas em muitas áreas, quais sejam: engenharia, arquitetura, *design* e computação, visando à resolução de problemas práticos. Assim, até hoje, a geometria está muito próxima a nossa vida cotidiana: em casa, na escola, no trabalho, em objetos que utilizamos. Um pedaço de barbante nos dá a ideia de um segmento de reta; um cantinho de nosso quarto, entre o chão e as duas paredes, pode nos parecer um ponto; e o tampo da mesa de jantar dá-nos a ideia de um plano.

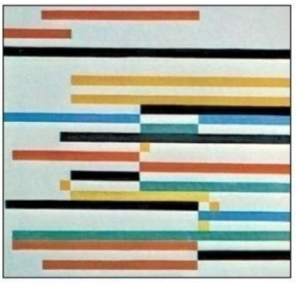
Ponto, reta e plano são conceitos geométricos primitivos, aceitos sem definição, e considerados intuitivos. São básicos para a construção de postulados (ou axiomas) que irão estabelecer toda uma estrutura lógica e formal da matemática.

Outras noções básicas de Geometria Plana muito importantes, antes de iniciarmos os próximos conteúdos, são: lugar geométrico e ângulo.

Lugar geométrico: é um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade. A circunferência é o lugar geométrico mais básico, definido como o conjunto de pontos que possuem a mesma distância de um único ponto denominado como centro.

Ângulo: é o espaço de um plano concebido por meio da abertura entre duas semirretas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo. Esta abertura é medida em radianos ou graus.

PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

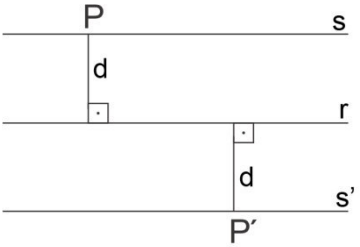


W. Cordeiro, *Movimento*, 1951.
Têmpera s/ tela.

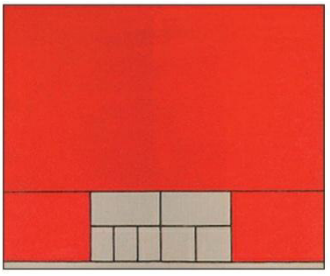
L. Sacilotto, *Concreção*, 1954.
Óleo s/ tela.

Fonte: AMARAL, 1977.

Nessas obras do Movimento artístico brasileiro denominado Concretismo, os artistas utilizaram, como forma de expressão gráfica, composições variadas de feixes de retas paralelas, cujos pontos que a compõem tem a propriedade de terem a mesma distância uns dos outros. Assim, o lugar geométrico das retas equidistantes de uma reta **"r"** é o par de retas paralelas (**"s"** e **"s´"**) a **"r"**.



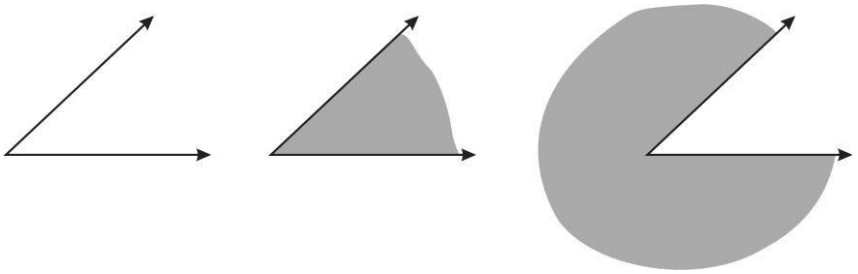
Já na obra a seguir, o artista utilizou uma composição combinando retas perpendiculares umas às outras, ou seja, elas formam um ângulo de 90º entre si.



Milton Dacosta, *Construção sobre fundo vermelho*, 1959. Óleo s/ tela.
Fonte: NAVES, 1996.

ÂNGULOS

As regiões formadas entre duas semirretas de mesma origem são chamadas de ângulos. Observe:



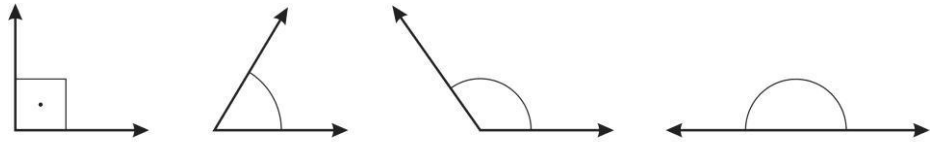
Os ângulos podem ser classificados como:

Ângulo Reto: possuem medida igual a 90º.

Ângulo Agudo: possui medida menor que 90º.

Ângulo Obtuso: possui medida maior que 90º.

Ângulo Raso: possui medida igual a 180º.

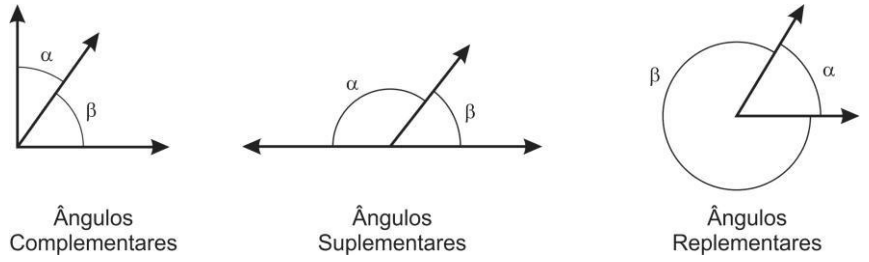


Os ângulos também podem ser:

Ângulos Complementares: somados, os ângulos resultam em 90º.

Ângulos Suplementares: somados, os ângulos resultam em 180º.

Ângulos Replementares: somados, os ângulos resultam em 360º.



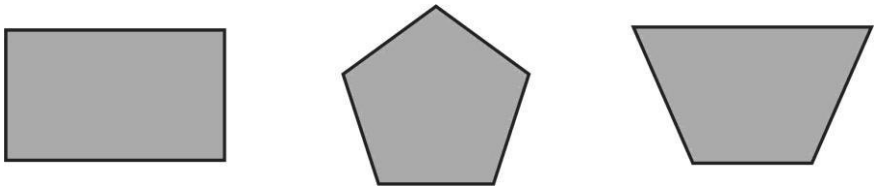
POLÍGONOS

Para entrar no assunto sobre polígonos, é importante antes tratar sobre a poligonal, que é caracterizada como uma figura formada por uma sequência de pontos e segmentos de reta, sendo os pontos considerados vértices da poligonal e os segmentos, seus lados.

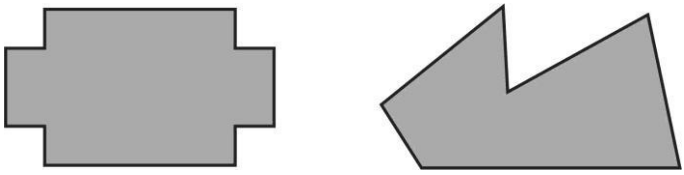
Assim, um polígono é uma poligonal que atende a três condições: os lados da poligonal se interceptam apenas em suas extremidades; cada vértice é extremidade de dois lados; e dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Assim, um polígono possui *n* lados, *n* vértices e *n* ângulos.

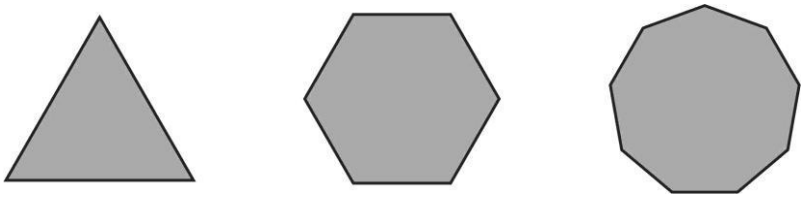
Os polígonos podem ser denominados também como convexos e não convexos (ou côncavos). Um polígono é considerado convexo se estiver sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados. Além disso, os polígonos convexos não possuem ângulo interno maior que 180º.



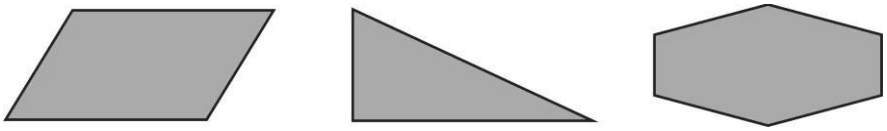
Os polígonos não convexos ou côncavos possuem, pelo menos, um ângulo interno maior que 180º.



Os polígonos também podem ser classificados como regulares ou irregulares. Os polígonos regulares possuem todos os seus lados congruentes e os ângulos internos também congruentes.



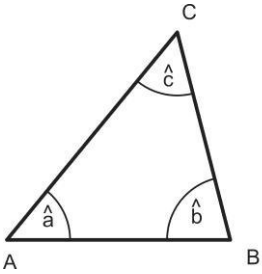
Os polígonos que não são regulares são chamados de irregulares.



TRIÂNGULOS

O triângulo é o polígono formado por três segmentos de retas que se cruzam duas a duas. Considerado uma figura importante na geometria, o triângulo apresenta três vértices, três ângulos e três lados.

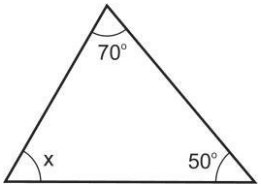
Os ângulos que o triângulo apresenta podem ser internos ou externos. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.



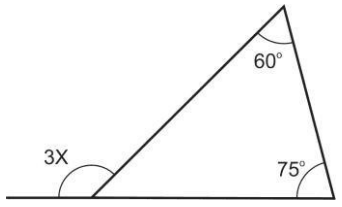
$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$

E a soma dos ângulos externos do triângulo é 360º. Outra relação importante entre os ângulos de um triângulo é que a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele.

Como exemplo, veja como se calcula a medida " x " nos triângulos dados:

a) 

$$50 + 70 + x = 180$$
$$x = 180 - 50 - 70$$
$$x = 60$$

b) 

Supondo que o ângulo cuja medida não está representada no triângulo mede y, temos:

$$60 + 75 + y = 180 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 180 - 60 - 75 \Rightarrow y = 45$$

Sendo assim:

$$3x+45=180 \Rightarrow 3x=180-45 \Rightarrow 3x=135 \Rightarrow x=45$$

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

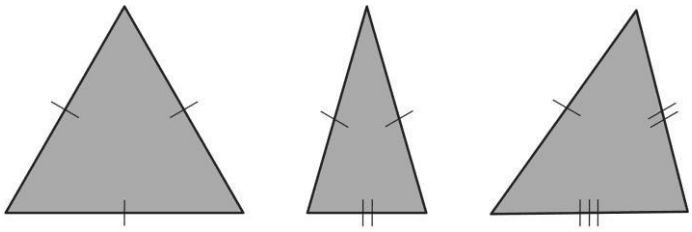
Os triângulos se classificam quanto à medida dos seus lados e quanto à medida dos seus ângulos.

Classificação do triângulo quanto à medida dos seus lados:

Triângulo equilátero: apresenta três lados com medidas iguais;

Triângulo isósceles: apresenta dois lados com medidas iguais;

Triângulo escaleno: apresenta três lados com medidas diferentes.

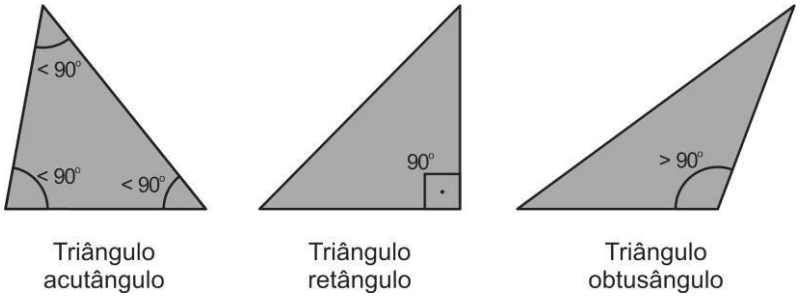


Classificação do triângulo quanto à medida dos seus ângulos:

Triângulo acutângulo: todos seus ângulos internos possuem medidas menores que 90º, ou seja, agudo;

Triângulo retângulo: possui um de seus ângulos internos igual a 90º;

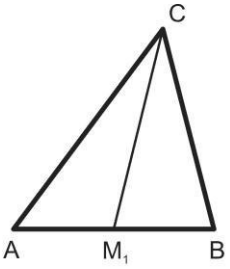
Triângulo obtusângulo: possui um ângulo maior que 90º, ou seja, obtuso.



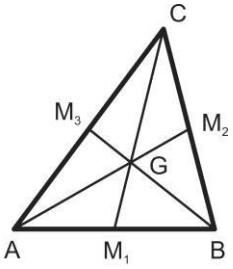
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Antes de apresentar os pontos notáveis do triângulo, é importante introduzir o conceito de ponto médio (M), o qual se define como o ponto que divide um segmento de reta dado (AB) em duas partes iguais, que pode ser verificado na figura a seguir.

Ao encontrar o ponto médio de um dos lados de um triângulo, pode-se traçar uma reta deste ponto até o vértice oposto, denominada **mediana**. Ao repetir este mesmo processo com os outros dois lados do triângulo, tem-se três medianas, que se encontram em um ponto chamado **baricentro**. Este ponto notável equivale ao centro de equilíbrio do triângulo, ou seu centro de gravidade.

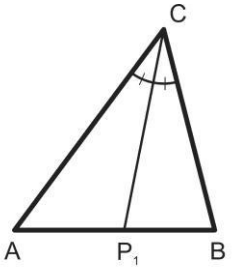


CM_1 é uma das três medianas do triângulo ABC.

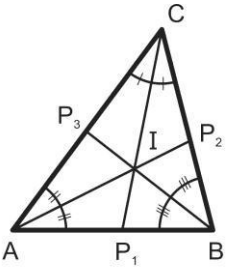


G é o baricentro do triângulo ABC.

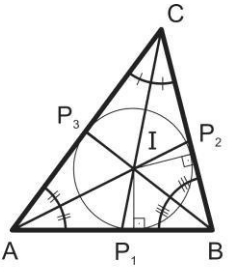
Ao traçar uma reta que divide ao meio um dos ângulos internos do triângulo, obtém-se a reta chamada **bissetriz**. Ao traçar as bissetrizes dos outros dois ângulos internos do triângulo, todas irão se encontrar em um ponto denominado **incentro**. É por meio deste ponto que pode-se traçar uma circunferência inscrita no triângulo, ou seja, que tangencia seus três lados.



CP_1 é uma das três bissetrizes do triângulo ABC.

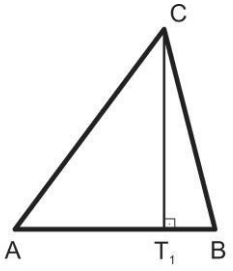


I é o incentro do triângulo ABC.

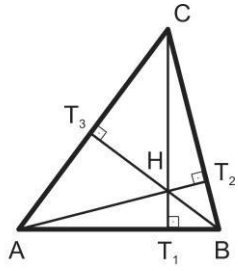


I é centro da circunferência inscrita ao triângulo ABC.

Outro ponto notável do triângulo pode ser obtido ao traçar uma reta que parte de um dos vértices e intercepta o lado oposto formando um ângulo de 90º. Este segmento de reta é chamado **altura** relativa ao lado AB ou ao vértice C. Ao encontrar todas as alturas relativas a cada um dos lados, obtém-se o **ortocentro**, o qual se apresenta como ponto de interseção entre elas. Este ponto notável pode ser interno ou externo ao triângulo.

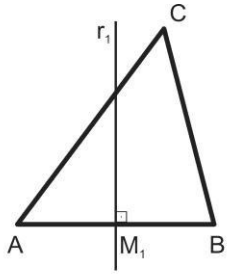


CT_1 é a altura relativa ao lado AB ou ao vértice C.

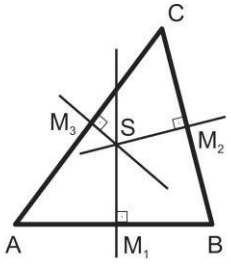


H é o ortocentro do triângulo ABC.

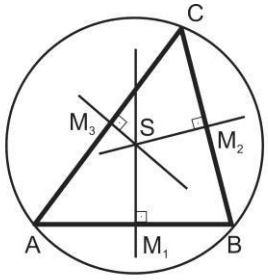
A **mediatriz** é a reta perpendicular a um dos lados do triângulo que passa pelo seu ponto médio. O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado **circuncentro**, que se apresenta como equidistante dos vértices. Assim, ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



r_1 é reta mediatriz do lado AB do triângulo ABC.



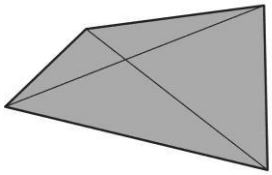
S é o circuncentro do triângulo ABC.



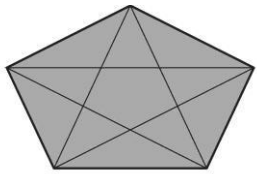
S é centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

DIAGONAL DE UM POLÍGONO CONVEXO

O segmento de reta que une um vértice de um polígono convexo a outro não consecutiva a ele é chamado **diagonal**. A quantidade de diagonais de um polígono ("d") é proporcional ao seu número de lados ("n") e para calculá-la, aplica-se a fórmula a seguir:



Polígono de quatro lados



Polígono de cinco lados

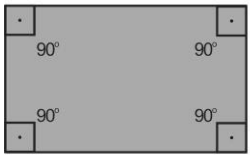
$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

QUADRILÁTEROS

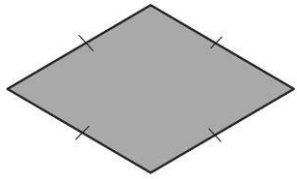
O quadrilátero é um polígono de quatro lados. Existem alguns quadriláteros considerados notáveis: o **paralelogramo** e o **trapézio**. O paralelogramo possui lados opostos paralelos.

Paralelogramo

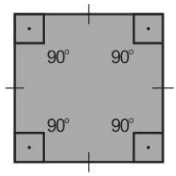
Dentre os paralelogramos, existem alguns especiais por possuírem propriedades específicas. O **retângulo** é um tipo particular de paralelogramo que apresenta quatro ângulos internos congruentes e retos. O **losango** é outro tipo de paralelogramo em que os quatro lados são congruentes. E o **quadrado** é o paralelogramo em que seus quatro lados são congruentes e seus quatro ângulos internos são retos.



Retângulo

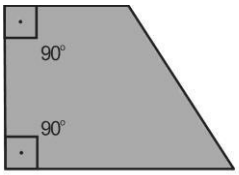


Losango

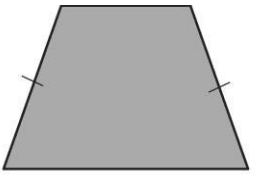


Quadrado

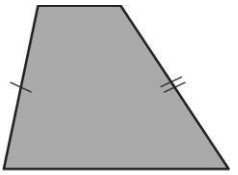
O trapézio é outro quadrilátero notável pois possui apenas dois lados paralelos, denominados **bases**. O **trapézio retângulo** é um tipo especial de trapézio e possui dois ângulos internos retos. No **trapézio isósceles**, seus lados não-paralelos são congruentes, e no **trapézio escaleno**, seus lados não-paralelos não são congruentes.



Trapézio Retângulo



Trapézio Isósceles



Trapézio Escaleno

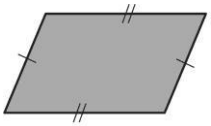
PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS:

1) Os lados opostos são congruentes;

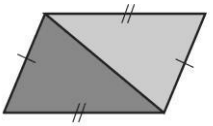
2) A diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes;

3) Os ângulos opostos são congruentes;

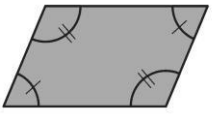
3) As diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio.



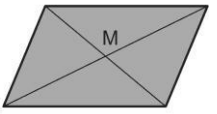
(1)



(2)



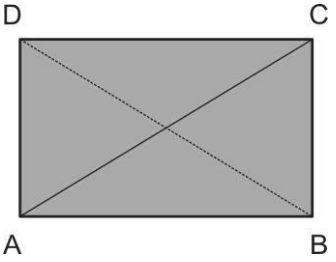
(3)



(4)

PROPRIEDADE DO RETÂNGULO:

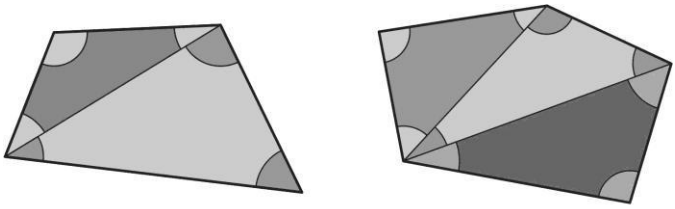
As suas diagonais são congruentes.



SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO

Para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono, inicia-se traçando diagonais a fim de formar triângulos. Como se sabe que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, o raciocínio parte então do princípio descrito a seguir.

Um quadrilátero possui dois triângulos internos. Assim, a soma dos seus ângulos internos será 2 vezes o ângulo de 180º, ou seja, 360º. Em um pentágono (polígono de cinco lados), tem-se três triângulos. Assim, a soma de seus ângulos internos será 3 vezes 180º, ou 540º. Portanto, pode-se determinar a soma dos ângulos internos de um polígono pelo número de lados ("n") adotando-se a fórmula a seguir.

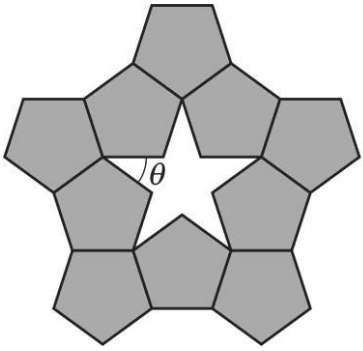


$$S_i = (n-2).180^\circ$$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO

A soma dos ângulos externos de um polígono sempre será 360º, independente do número de lados que ele possuir.

Exemplo (UNIFESP – 2003): Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura a seguir.



Nessas condições, o ângulo θ mede:

a) 108° b) 72° c) 54° d) 36° e) 18°

Resolução: Sendo S a soma dos ângulos internos, temos que, para um pentágono regular:

$$S=(n-2)\cdot 180^\circ \Rightarrow S=(5-2)\cdot 180^\circ \Rightarrow S=3\cdot 180^\circ \Rightarrow S=540^\circ$$

Por se tratar de um pentágono regular, temos que cada ângulo mede $\frac{540^\circ}{5}=108^\circ$. Podemos observar na figura que há 3 pentágonos unidos pelos vértices e que, o ângulo θ é replementar à soma dos ângulos dos três pentágonos em questão. Sendo assim, temos que θ mede:

$$360=\theta+108\cdot 3\Rightarrow \theta=360-324\Rightarrow \theta=36^\circ$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

MALHAS

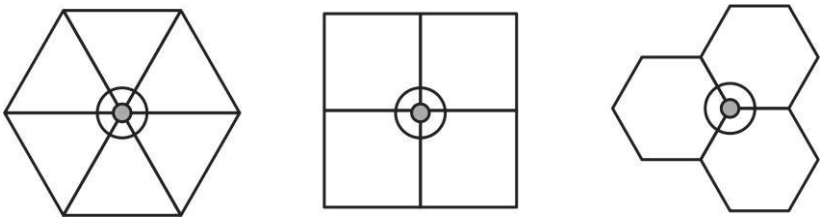
Quando se aplicam azulejos e ladrilhos na fase do acabamento de uma construção, seja do piso ou parede de uma casa ou de toda uma calçada, os operários normalmente utilizam formas geométricas para compor toda a área a ser pavimentada. Essas formas geométricas podem ser polígonos regulares ou irregulares.

Fotos: Thaís R. Ueno Yamada

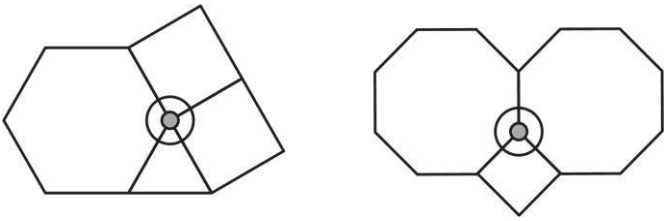
Um conjunto de polígonos forma uma pavimentação do plano apenas se o conjunto cobrir sem cruzamentos o plano, ou seja, todo ponto do plano irá pertencer a pelo menos um polígono do conjunto, e toda intersecção de dois polígonos terá área nula, sem sobreposições e sem espaços. Assim, os vértices são chamados de nós da pavimentação e os segmentos de reta são as arestas.

Para uma perfeita pavimentação de um plano com polígonos, é necessário que a soma dos seus ângulos internos em volta de um mesmo nó seja exatamente 360º. Dessa forma, podemos ter uma pavimentação com o mesmo polígono

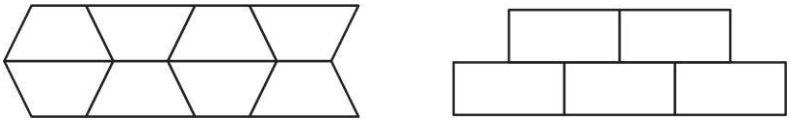
regular: triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares. Nesses casos, são obtidas **malhas regulares**.



Também é possível chegar a uma pavimentação do plano combinando dois ou mais polígonos regulares em volta de um nó, ou seja, **malhas semirregulares**:



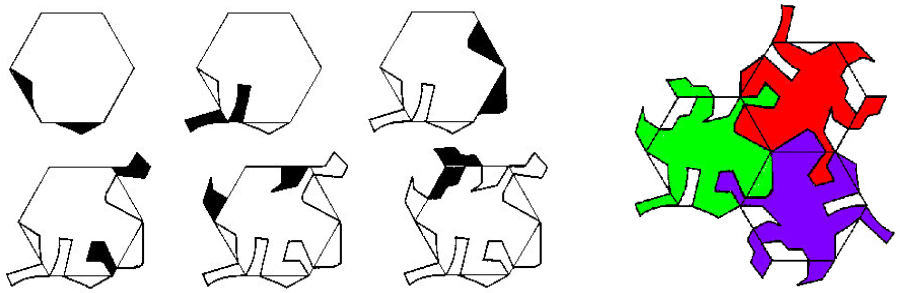
Há inclusive a possibilidade de compor pavimentações no plano com polígonos irregulares diversos: retângulos, trapézios, hexágonos irregulares, triângulos isósceles entre outros.



SIMETRIA E ISOMETRIA

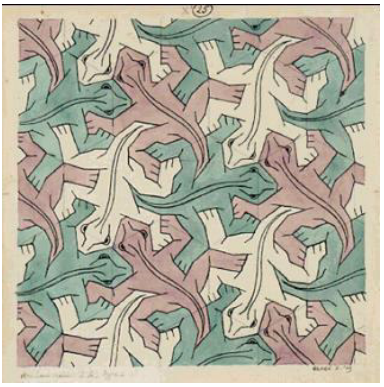
Maurits Cornelis Escher (1898 -1972) foi um grande artista holandês que deixou uma variedade de obras as quais trabalham a geometria e a transformação das figuras. Fascinado pelos mosaicos mouros do Palácio de Alhambra, em Granada, Espanha, ele se dedicou ao estudo da pavimentação do plano, transformando geometria em arte e vice-versa por meio da divisão regular do plano em figuras geométricas que se transmutam, repetem-se e completam-se. No preenchimento de superfícies, Escher empregava figuras existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas, répteis, obtidos por meio da alteração de uma forma geométrica original preservando sua área inicial.

Observe como Escher chegou ao desenho final de um réptil muito aplicado em suas gravuras e como ele se complementa perfeitamente.



Fonte: http://www.uv.es/~buso/escher/totpod_es.html

Como resultado, tem-se esta grande e belíssima obra de Escher:



Fonte: The Official Website of M.C.Escher.

Disponível em: <http://www.mcescher.com>

Observando mais atentamente a construção desta obra, pode-se dizer que o artista utilizou principalmente a:

a) translação

b) simetria axial

c) simetria em relação a um ponto

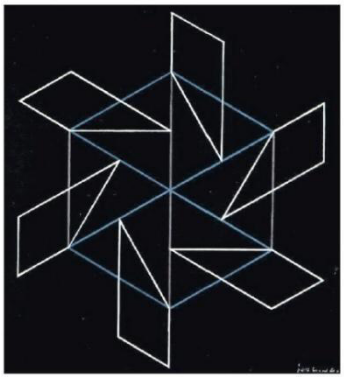
d) rotação

e) reflexão

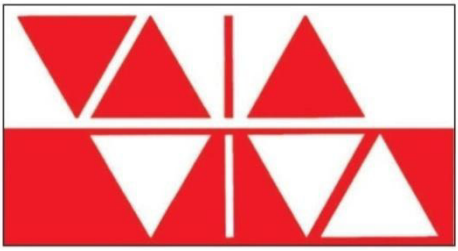
Antes de responder a essa questão, é preciso definir o conceito de simetria e cada uma das alternativas apresentadas.

Simetria é a semelhança exata de uma figura em relação a um ponto, linha ou plano. Dada uma imagem, a sua correspondente simétrica irá preservar suas dimensões e ângulos, mas nem sempre manterá a direção e o sentido de suas várias partes.

Exemplos de simetrias podem ser facilmente encontrados na natureza e nos objetos que o Homem produz: nas asas de uma borboleta, nas pétalas de uma flor, nos flocos de neve, em uma concha do mar; na arquitetura, artes, engenharia.



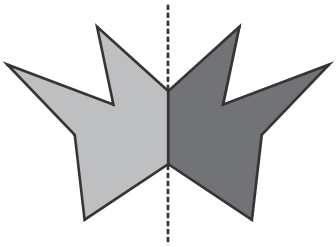
Judith Lauand, *Espaço virtual*, 1960. Têmpera s/ tela.
Fonte: O Museu de Arte Contemporânea da Universidade de São Paulo, 1990



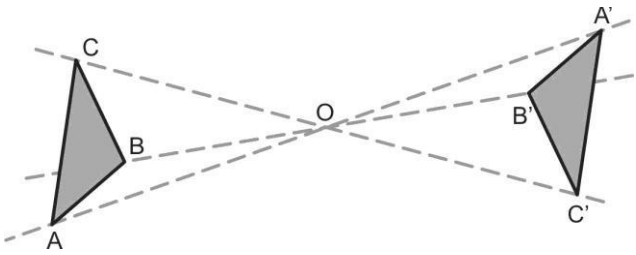
Augusto de Campos, *Viva Vaia*, 1974. Papel.
Fonte: Campos, A. Plaza, 1974.

Simetria em relação a um eixo (axial) ou a um ponto

Simetria axial: também considerada como simetria em relação a retas, é aquela onde pontos, objetos ou suas partes são a reprodução espelhada um do outro, com respeito a uma reta dada, denominada eixo de simetria.



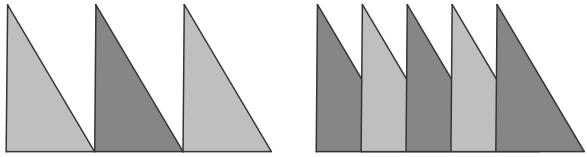
Simetria a um ponto ou central: duas figuras são simétricas em relação a um ponto dado O chamado centro da simetria quando cada um dos pontos de uma figura é o simétrico com respeito ao da outra figura.



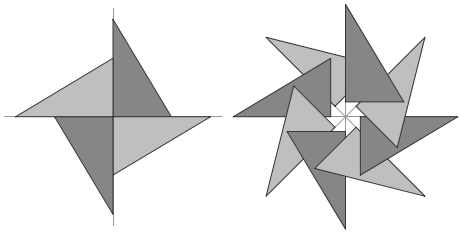
ISOMETRIA

A isometria é a transformação geométrica de uma figura, mantendo-se as distâncias entre os pontos que a constituem. Ou seja, os segmentos da figura transformada por isometria são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido, mas mantendo também os ângulos.

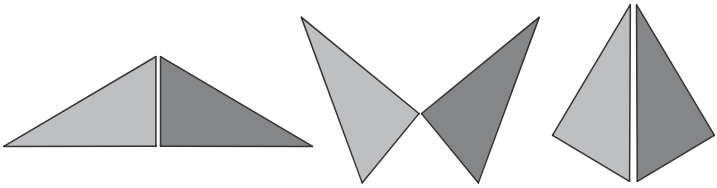
Translação: Repetição e deslocamento da forma ao longo de uma linha através de um ritmo estabelecido, sem girá-lo ou refleti-lo.



Rotação: Giro de uma forma em torno de um eixo, considerando que todos os seus pontos percorrerão um ângulo de medida constante no mesmo sentido, a partir de um ponto fixo.

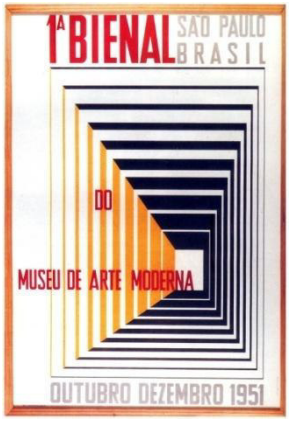


Reflexão: Simetria bilateral determinada por um eixo que serve de referência para a imagem refletida da figura original e que pode interceptar a figura ou não.

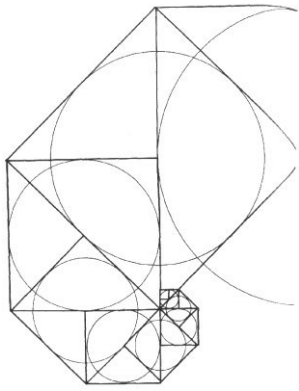


Agora você pode responder à questão apresentada anteriormente.

SEMELHANÇA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS



Antonio Maluf, *Cartaz da I Bienal de São Paulo*, 1951.
Fonte: Projeto Arte Brasileira..., 1977.



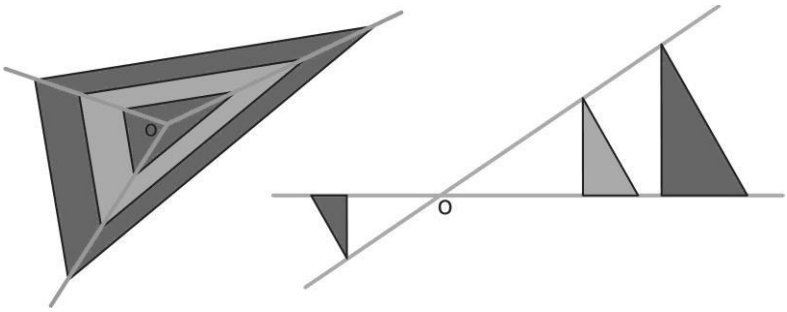
Fonte: MUNARI, 1997.

Nas duas imagens anteriores, há a aplicação de um recurso muito interessante, o qual consiste de figuras semelhantes, ou seja, a mesma figura é ampliada ou reduzida da seguinte maneira:

* Os ângulos correspondentes devem ser iguais (congruentes);

* Os comprimentos correspondentes devem ser proporcionais.

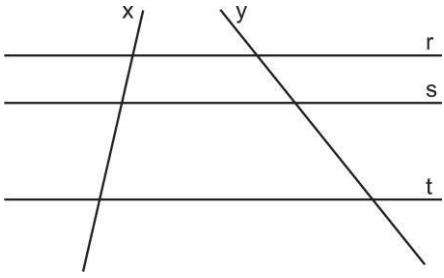
Para trabalhar o conceito de semelhança entre figuras geométricas, aplica-se a **homotetia**, que une semelhança com paralelismo. As figuras homotéticas são, ao mesmo, semelhantes e possuem lados homólogos paralelos entre si, pois se reduz ou se amplia uma figura a partir de um centro (ponto fixo) e de uma razão dada (cujo símbolo é "**k**").



Os círculos e os quadrados são figuras geométricas planas que são sempre semelhantes. Já os retângulos, triângulos e outros polígonos nem sempre o são.

FEIXE DE PARALELAS

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas distintas de um plano que são paralelas entre si. A reta transversal é a que intersecciona todas as retas do feixe. As retas "r", "s" e "t" fazem parte de um feixe de retas paralelas e as retas "x" e "y" são as transversais.



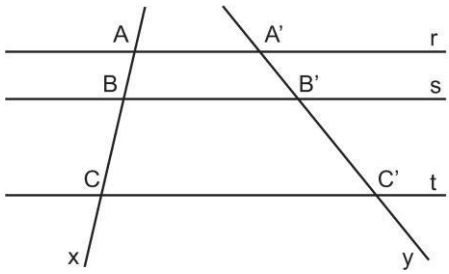
TEOREMA DE TALES

Tales de Mileto é reconhecido como primeiro filósofo do Ocidente e apontado como um dos sete sábios da Grécia Antiga. Tales desenvolveu atividades enquanto filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo. Enquanto matemático, seus estudos na Geometria possuem relevância até os dias atuais: foi Tales quem provou que os ângulos da base dos triângulos isósceles são semelhantes, mostrou o teorema que afirma sobre dois triângulos com dois ângulos de um lado, respectivamente, iguais, são iguais. O filósofo também disse que todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais, entre outros descobrimentos.

Um dos principais teoremas que são utilizados em geometria é o Teorema que leva seu nome, o Teorema de Tales. Esse teorema tem várias aplicações no

cotidiano, sendo utilizado aliado a semelhança de triângulos para medir, por exemplo, distâncias inacessíveis.

O enunciado do teorema diz que "Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais", como ilustra a figura abaixo.



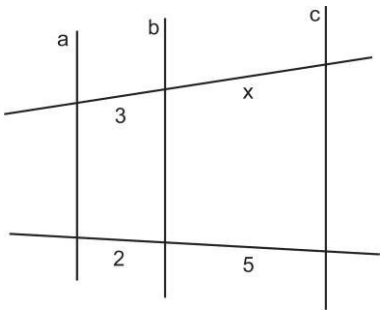
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

ou

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

Exemplos:

1) Na figura, sendo a // b //c, o valor de x é:



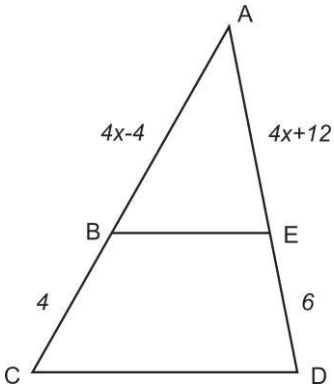
Segundo teorema de Tales, temos que:

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{x}$$

$$2x = 15$$

$$x = 7{,}5$$

2) No triangulo ACD abaixo, os segmentos BE e CD são paralelos.



Pelo teorema de Tales, temos que:

$$\frac{(4x-4)}{4} = \frac{(4x+12)}{6}$$

$$(4x-4)\cdot 6 = (4x+12)\cdot 4$$

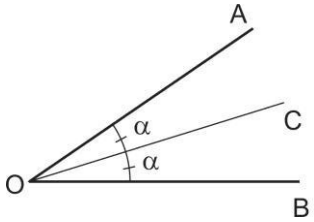
$$24x - 24 = 16x + 48$$

$$8x = 72$$

$$x = \frac{72}{8} = 9$$

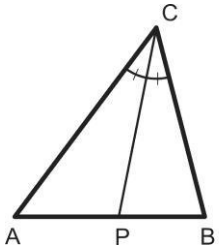
TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

Outro instrumento importante para o estudo dos triângulos é o Teorema da Bissetriz Interna, em que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, sobre o lado oposto, segmentos proporcionais aos lados pertencentes aos do ângulo considerado".



OC é a reta bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$

Dado um triângulo ABC e traçando uma bissetriz interna do ângulo C, determina-se o ponto P no segmento AB.

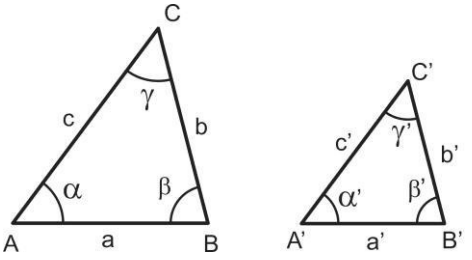


Pelo Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AP}{PB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{AP} = \frac{CB}{PB}$$

TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.



$$\triangle ABC \approx \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cong \alpha' \\ \beta \cong \beta' \\ \gamma \cong \gamma' \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

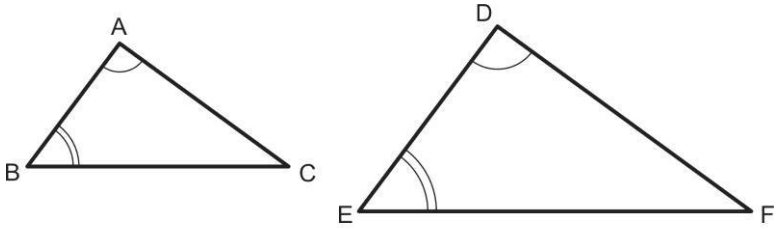
sendo **k** uma constante de proporcionalidade.

CASOS DE SEMELHANÇA

Considerando os lados e os ângulos dos triângulos, é possível determinar quando os triângulos são semelhantes em alguns casos.

Caso Ângulo – Ângulo (AA)

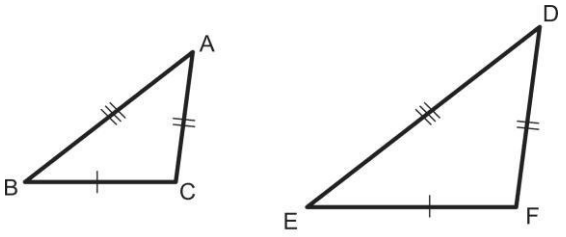
Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta DEF$$

Caso Lado-Lado-Lado (LLL)

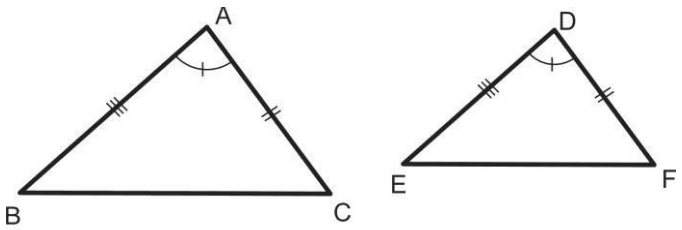
Dois triângulos são semelhantes quando possuem os lados respectivamente proporcionais.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta DEF$$

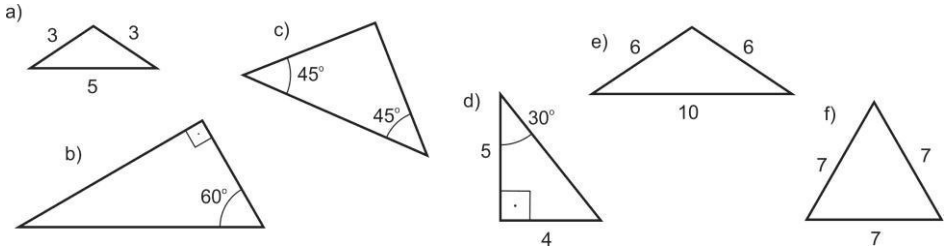
Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados congruentes.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ e } \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta DEF$$

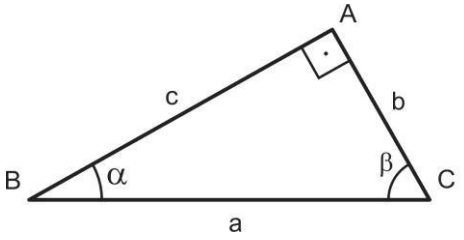
Exemplo: aponte quais triângulos abaixo são semelhantes e justifique.



Resposta: (Os triângulos "a" e "e" são semelhantes, pois seus três lados são respectivamente proporcionais. O ângulos internos do triângulo "b" são 90º, 60º e 30º, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Com este mesmo raciocínio, nota-se que os ângulos do triângulo "d" são congruentes aos do triângulo "b". Assim, os triângulos "b" e "d" são semelhantes).

RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

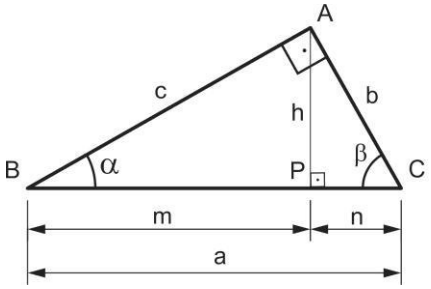
Pelo **Teorema de Pitágoras**, em um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa (lado do triângulo oposto ao ângulo de 90º) ao quadrado é igual a soma das medidas ao quadrado de seus catetos.



a é a hipotenusa do triângulo retângulo.
b e **c** são catetos do triângulo retângulo.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Traçando-se a altura relativa à hipotenusa, divide-se o triângulo ABC em dois triângulos semelhantes a ele e entre si. A partir da semelhança de triângulos, pode-se obter as seguintes relações:



1) $h^2 = m.n$

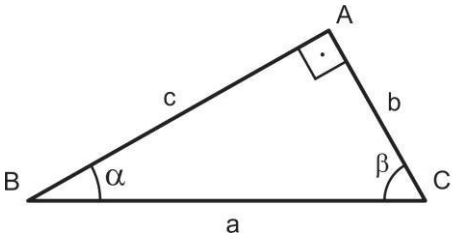
2) $b.c = a.h$

3) $b^2 = a.n$

4) $c^2 = a.m$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A trigonometria no triângulo retângulo é uma ferramenta bastante utilizada para o cálculo de distâncias. Para podermos estudar as relações trigonométricas, utilizamos as mesmas nomeações dos lados do triângulo abordados anteriormente.



a é a hipotenusa do triângulo retângulo.
b e **c** são catetos do triângulo retângulo.
Além do ângulo reto, tem-se α e β, que são ângulos agudos.

As relações trigonométricas no triângulo retângulo estabelecem certas razões envolvendo o estudo dos ângulos e das medidas dos lados triângulo.

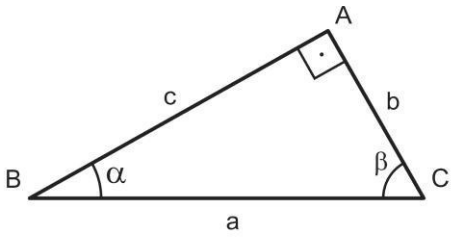
O seno de um ângulo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

O cosseno de um ângulo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

A tangente de um ângulo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \qquad cosseno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \qquad tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Definidas as razões trigonométricas, obtemos as seguintes igualdades para o triângulo retângulo abaixo:



Pelo ângulo α :

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{b}{c}$$

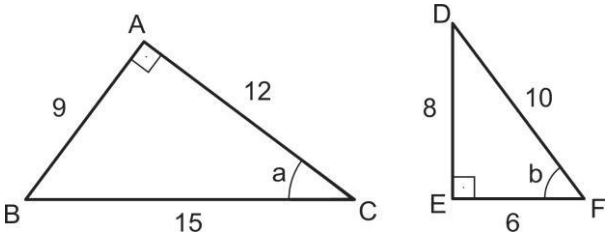
Pelo ângulo β :

$$sen\ \beta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \beta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \beta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{c}{b}$$

Como exemplo, calcule o seno, cosseno e tangente nos triângulos abaixo em relação aos ângulos ABC e DEF.



Veja que, para cada triângulo, temos que:

ABC

$$\text{sen a} = \frac{9}{15} = 0{,}6$$

$$\cos a = \frac{12}{15} = 0{,}8$$

$$\text{tg a} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

DEF

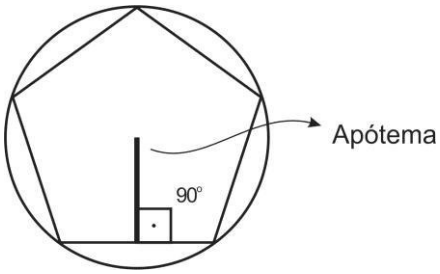
$$\text{sen b} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\cos b = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\text{tg b} = \frac{8}{6} = 1{,}33$$

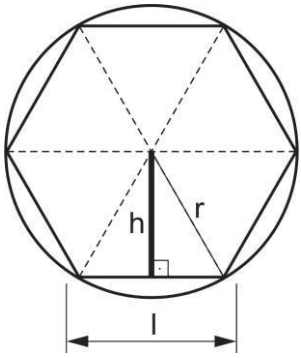
APÓTEMAS DOS POLÍGONOS REGULARES

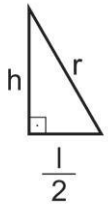
Em um polígono regular inscrito numa circunferência, o segmento de reta perpendicular a um dos lados da figura e que parte do centro da circunferência que o circunscreve é chamado de apótema.



A medida da apótema está diretamente relacionada ao raio da circunferência em que está inscrito, às medidas do ângulo central e do lado do triângulo que forma o polígono.

Na figura a seguir, sabe-se que, se o raio da circunferência mede 4 cm, o lado do hexágono regular inscrito também é igual. A partir do Teorema de Pitágoras, determina-se a medida do apótema.

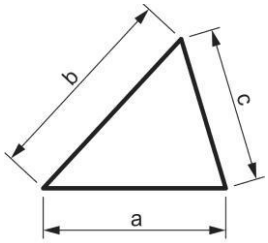




$$r^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$4^2 = h^2 + (2)^2$$
$$16 = h^2 + 4$$
$$h^2 = 16 - 4$$
$$h = \sqrt{12}$$
$$h = 2\sqrt{3}$$

PERÍMETROS E ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

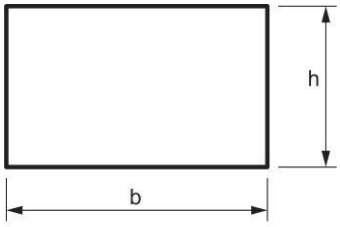
A medida do perímetro de um polígono é dada pela soma das medidas de seus lados.



p=a+b+c

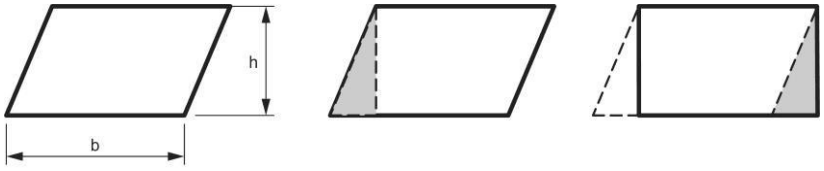
Quando medimos superfícies como terrenos, piso de um quarto ou a parede de um banheiro, obtemos um valor que representa sua área.

Área de um retângulo: obtida pelas medidas de seu comprimento "**b**" e de sua largura "**h**" (ou base **b** e altura **h**), ou seja, **A (área)** = **b** x **h.** Para obter-se a área de um quadrado, utiliza-se da mesmas medidas. Assim, como as medidas de comprimento e largura (ou base e altura) são iguais, temos: **A (área)** = **b x b** = b^2.



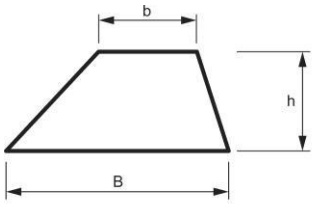
A=b.h

Área de um paralelogramo: obtida pelas medidas de seu comprimento "**b**" e de sua largura "**h**" (ou base **b** e altura **h**), ou seja, **A (área)** = **b x h.** É a mesma fórmula para a obtenção da área do retângulo pois utiliza-se do raciocínio de que é possível cortar um triângulo retângulo em uma das pontas do paralelogramo e deslocá-lo para o outro lado, formando um retângulo.

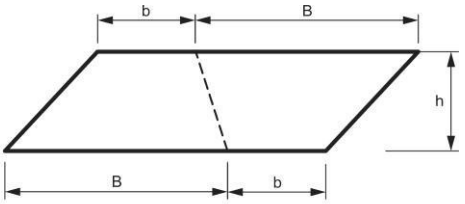


A=b.h

Área de um trapézio: obtida pelas medidas de seu comprimento maior "**B",** de seu comprimento menor "**b"** e de sua largura "**h"** (ou base maior **B**, base menor **b** e altura **h**). Essa fórmula é obtida empregando-se o raciocínio de que dois trapézios formam um paralelogramo.

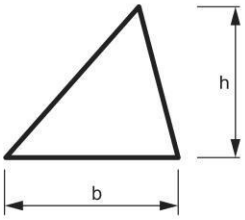


$$A=\frac{(B+b).h}{2}$$

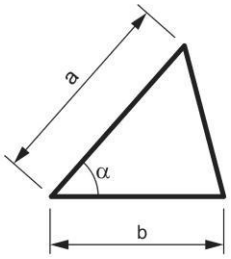


$$A=\frac{(B+b).h}{2}$$

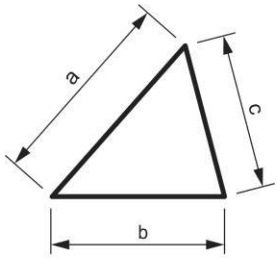
Área de um triângulo: obtida pelas medidas de seu comprimento "**b"** e de sua largura "**h"** (ou base **b** e altura **h**). Essa fórmula apela para o raciocínio de que dois triângulos formam um retângulo. Mas também pode ser obtida por outros meios:



$$A=\frac{b.h}{2}$$

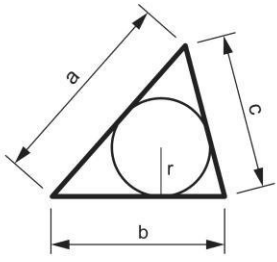


$$A=\frac{a.b.sen\alpha}{2}$$



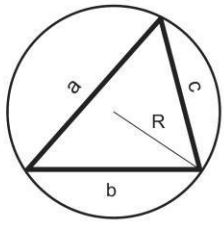
$$A=\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$\text{sendo } p=\frac{(a+b+c)}{2}$$



$$A= p.r$$

$$\text{sendo } p=\frac{(a+b+c)}{2}$$

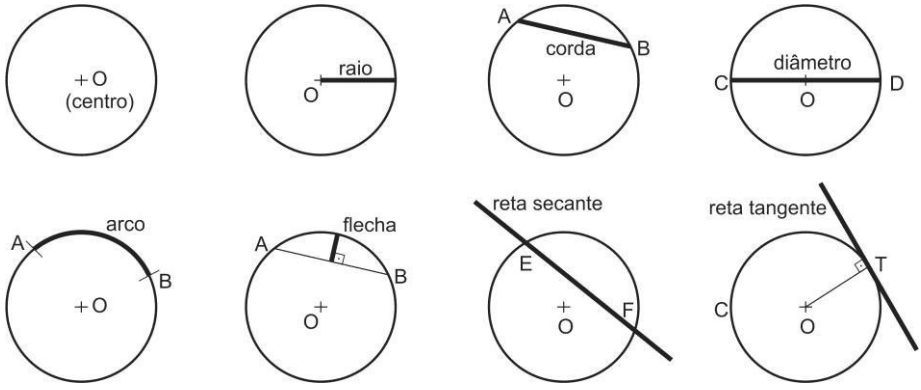


$$A=\frac{a.b.c}{4R}$$

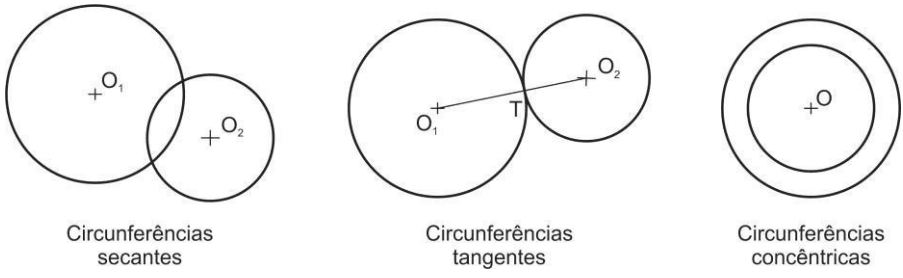
CIRCUNFERÊNCIAS

Circunferência é a curva plana cujos pontos são equidistantes de um mesmo ponto denominado centro da circunferência. Esta distância do centro a qualquer um dos pontos da circunferência é o **raio**. **Corda** é o segmento determinado por dois pontos quaisquer da circunferência e o **diâmetro** é a corda que passa pelo centro da circunferência. **Arco** é uma parte da circunferência limitada por dois pontos. **Flecha** é o segmento de reta que une o ponto médio da corda ao ponto médio do arco correspondente.

Secante é a reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos e reta **tangente** é a que intercepta a circunferência em apenas um ponto, chamado de ponto de tangência. A tangente é perpendicular à reta que liga o centro da circunferência ao ponto de tangência.

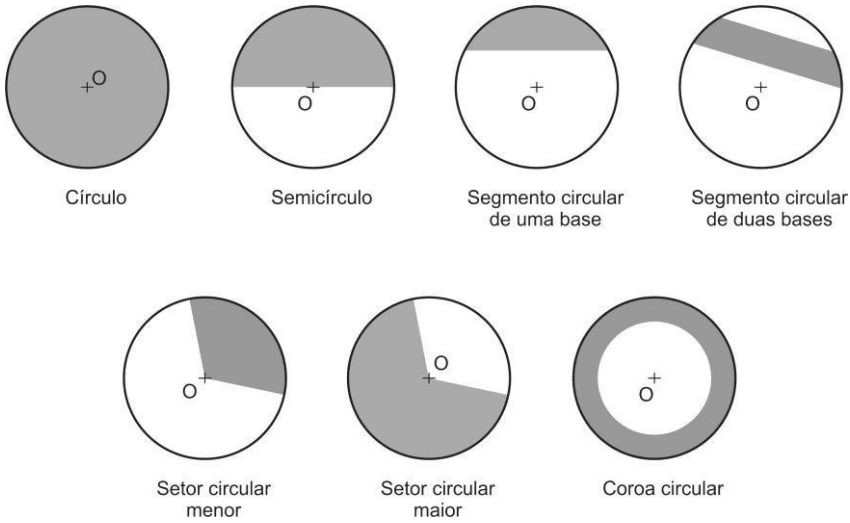


Duas ou mais circunferências podem ser **secantes**, **tangentes** ou **concêntricas** (o centro é mesmo).



O **círculo** é a superfície plana e fechada, limitada pela circunferência. Se delimitarmos uma área do círculo pelo seu diâmetro e pelo arco correspondente, temos o **semicírculo**. Se o delimitarmos por uma corda e pelo arco correspondente, temos um **segmento circular de uma base**. Se ele estiver delimitado por duas

cordas paralelas e pelos arcos compreendidos entre elas, tem-se o **segmento circular de duas bases**. O **setor circular** é delimitado por um arco e pelos raios passam pelos seus pontos extremos, podendo ser menor ou maior. A **coroa circular** é a área do círculo compreendida entre duas circunferências concêntricas.

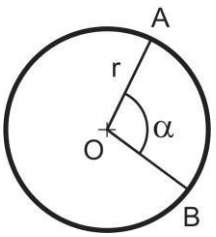


O comprimento de uma circunferência é determinado supondo-se que sobre ela tem-se um fio qualquer, o qual é cortado em determinado ponto e esticado como um segmento de reta. Assim, tem-se um segmento AB, o qual se denomina medida do comprimento da circunferência. Para se chegar a essa medida, utiliza-se $C=2.\pi.r$, sendo π o número irracional e o raio "**r**" da circunferência.

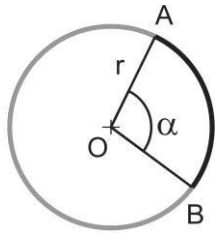
Para obter a área do círculo de raio "**r**" tem-se: $Área=\pi.r^2$

Comprimento de arcos de circunferência

O ângulo formado pelos segmentos de reta AO e OB, com vértice no centro, é chamado ângulo central. O ângulo central determina dois arcos na circunferência.



$A\hat{O}B$ = ângulo central

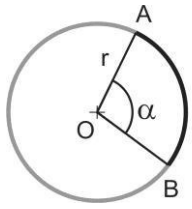


Para se medir o comprimento de arcos de circunferência, utiliza-se dois tipos de unidade de medida: grau e radiano.

Arco de 1º (um grau) é aquele cujo comprimento é igual a 1/360 do comprimento da circunferência. Assim, um arco de uma volta completa corresponde a 360º. Ao dividir este arco de 1º em 60 partes, cada uma destas partes corresponderá a 1' (um minuto). Se repetirmos este processo com 1', teremos partes de 1" (um segundo). Assim, 1o corresponde a 60' e 1' corresponde a 60".

O arco de um radiano (1 rad) possui um comprimento igual ao raio da circunferência em que está contido. Assim, um arco de 3 rad de uma circunferência corresponde ao arco de comprimento correspondente a três vezes a medida de seu raio.

Assim, a medida do ângulo central em radianos corresponde à razão do comprimento do arco ("l") pelo seu raio ("r").

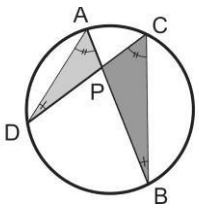


$$\alpha = \frac{l}{r}$$

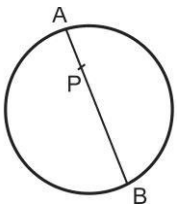
POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Potência interior à circunferência

Considerando um ponto **P** interior a uma circunferência e duas cordas **AB** e **CD** que contenham o ponto, tem-se os triângulos **PAD** e **PBC,** os quais possuem ângulos iguais, respectivamente, sendo, portanto, semelhantes e seus lados proporcionais. Assim:



$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

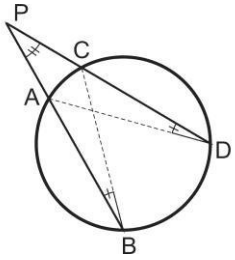


Potência do ponto **P** em relação à circunferência

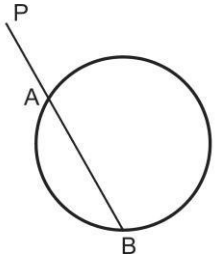
$p = PA \cdot PB$

Ponto exterior à circunferência

Considerando um ponto **P** exterior a uma circunferência e duas secantes **PAB** e **PCD** que contenham o ponto, tem-se os triângulos **PAD** e **PBC,** os quais possuem ângulos iguais, respectivamente, sendo, portanto, semelhantes e seus lados proporcionais. Assim:



$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$



Potência do ponto **P** em relação à circunferência

$p = PA \cdot PB$

Agora que você conhece mais sobre Geometria Plana, vamos ver a seguir como esses conteúdos são trabalhados em questões do ENEM e de outros vestibulares.

(ENEM – 2002): Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

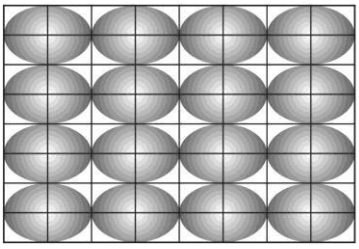


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

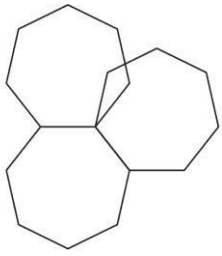
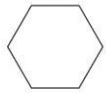
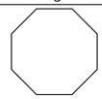


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido devera ter a forma de um:

a) triângulo b) quadrado c) pentágono d) hexágono e) eneágono

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

(UFSCar): A figura 1 representa um determinado encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem sobreposições e cortes.

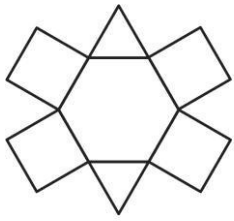


Figura 1

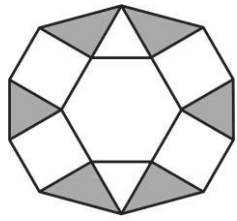


Figura 2

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados perfeitamente nos espaços da figura 1, como indicado na figura 2, é correto dizer que:

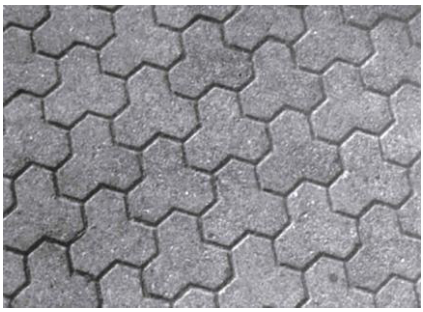
a) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 15°.
b) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
c) 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 50° e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.

d) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.

e) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos escalenos.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

(ENEM – 2011)



Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

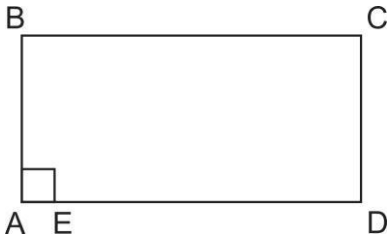
O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de:

a) 45° b) 60° c) 90° d) 120° e) 180°

Resolução: O ângulo de rotação no centro da figura deve ser de 360 graus. Assim, por decomposição da figura temos 360/3, que é igual a 120 graus.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

(ENEM – 2009): O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que AB = BC/2, Antonio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual AE = AB/5 é o lado do quadrado.



Nesse caso, a área definida por Antonio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele:

a) duplicasse a medida do lado do quadrado.

b) triplicasse a medida do lado do quadrado.

c) triplicasse a área do quadrado.

d) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.

e) ampliasse a área do quadrado em 4%.

Resolução: Consideremos $AE = x$. Logo, a área do quadradinho com lado AE é x^2 e a área do terreno ABCDE é $5x \cdot 10x = 50x^2$. Comparando as duas áreas, percebemos que a área demarcada por Antônio corresponde a 2% da área total do terreno. Dessa forma, Antônio atingiria o limite determinado pelas condições exigidas, que é de 6%, se ele triplicasse a área do quadrado.

Resposta: A alternativa correta é a letra **c.**

(ENEM – 2012): O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

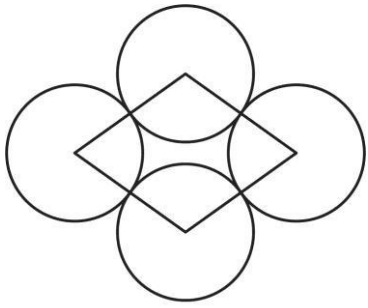


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

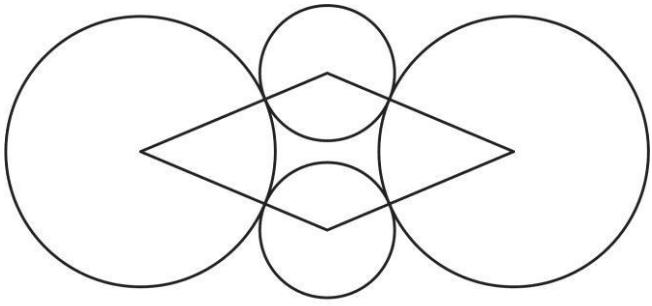


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de:

a) 300% b) 200% c) 150% d) 100% e) 50%

Resolução: Vamos considerar o raio da Figura 1 como sendo 1. Neste caso temos o raios, o que nos dá perímetro igual a 8. Na figura 2 temos 4 raios, cada um deles medindo 1 e 4 raios, cada um deles medindo 2. Sendo assim, o perímetro do losango da figura 2 é 12. Portanto, o aumento do perímetro da figura em relação à figura 1 é 4, ou seja, 50%.

Resposta: A alternativa correta é a letra **e.**

(ENEM – 2008): O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

Figura 1

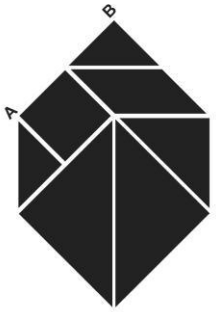


Figura 2

Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) 4 cm^2 b) 8 cm^2 c) 12 cm^2 d) 14 cm^2 e) 16 cm^2

Resolução: Como o lado do hexágono é 2 cm, olhando para a figura 1, a diagonal do quadrado mede 4 cm. Dessa forma, a área do quadrado da figura 1 é 8 cm^2. Como a área das três figuras são iguais, a área da "casinha" também será 8 cm^2.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

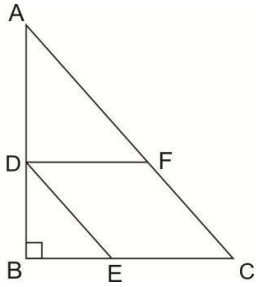
(ENEM – 2002): As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas a linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em media 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

a) 16 horas b) 20 horas c) 25 horas d) 32 horas e) 36 horas

Resolução: Considerando que Quito e Cingapura estão localizadas nas extremidades do diâmetro da circunferência de raio 6370 km, sabe-se que o comprimento da circunferência é calculado a partir da fórmula $\mathbf{C = 2 \cdot \pi \cdot r}$. Assim, chega-se ao valor de 40.022,77 km. Como, a distância entre as duas cidades é metade deste valor, chega-se ao tempo final de viagem de 25 h, dividindo-se a distância obtida por 800.

Resposta: A alternativa correta é a letra **c.**

(Fuvest – 2010): Na figura, o triângulo *ABC* é retângulo com catetos BC = 3 e AB = 4. Além disso, o ponto *D* pertence ao cateto AB, o ponto *E* pertence ao cateto BC e o ponto F pertence à hipotenusa AC, de tal forma que *DECF* seja um paralelogramo. Se $DE = \frac{3}{2}$, então a área do paralelogramo *DECF* vale:



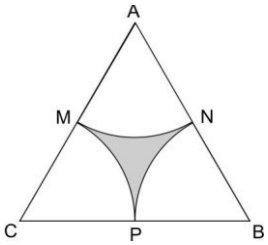
a) $\frac{63}{25}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{58}{25}$ d) $\frac{56}{25}$ e) $\frac{11}{5}$

Resolução: Para calcular a área do paralelogramo DECF é necessário obter a medida do segmento EC e do segmento DB, pois o primeiro corresponde a base do paralelogramo e o segundo à altura do mesmo. Pelo Teorema de Pitágoras, encontra-se a medida da hipotenusa AC do triângulo ABC (5) e pelo Teorema de Tales, obtém-se o valor de DB $\left(\frac{6}{5}\right)$. Pelo mesmo procedimento, encontra-se o

valor de EC $\left(\frac{21}{10}\right)$. Assim, o cálculo da área do paralelogramo chega ao resultado de $\left(\frac{63}{25}\right)$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

(Fuvest): Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero de lado igual a 2. MN, NP e PM são arcos de circunferências com centros nos vértices A, B e C, respectivamente, e de raio todos iguais a 1. A área da região sombreada é:



a) $\sqrt{3}-\frac{3\pi}{4}$ b) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ c) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ d) $4\sqrt{3}-2\pi$ e) $8\sqrt{3}-3\pi$

Resolução: Para obter a área da parte hachurada, é necessário saber a área do triângulo e dos três setores circulares. Assim, a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula $\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p\cdot c)}$ sendo $p=\frac{(a+b+c)}{2}$, obtendo-se o valor $\sqrt{3}$. Os três setores circulares são iguais e sua área corresponde à metade da área da circunferência de raio 1. Assim, chega-se ao valor $\frac{\pi}{2}$. Com isso, a área da parte hachurada é $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$.

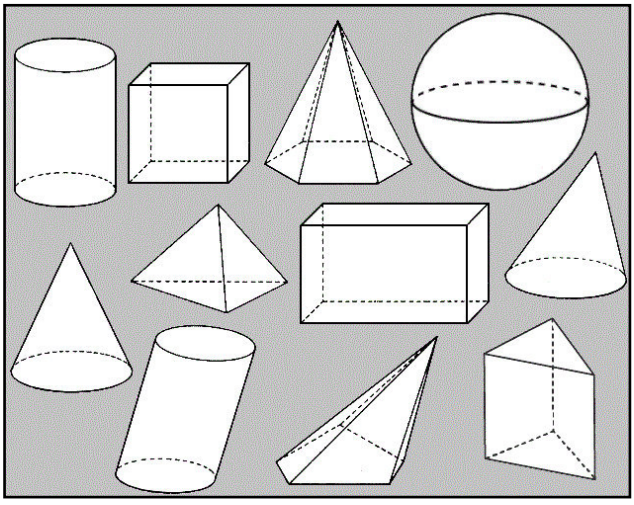
Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

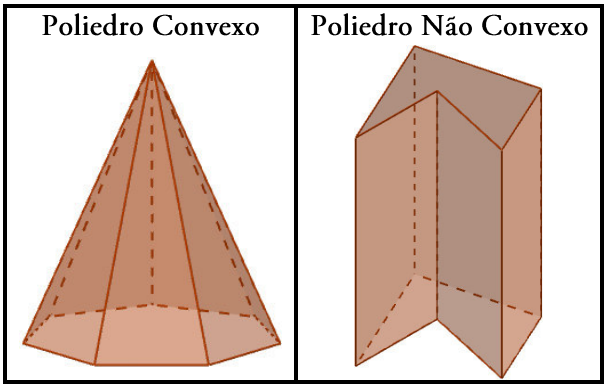
7 GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo serão estudados os poliedros e corpos redondos, enfatizando a parte métrica, ou seja, áreas e volumes.

Vamos considerar um poliedro como sendo um sólido geométrico formado por um número finito de polígonos, denominados de faces, onde cada lado desse polígono também é lado de um, e apenas de um, lado de outro polígono (esse lado será chamado de aresta). Quando a superfície do sólido for arredondada, denominamos de corpos redondos.

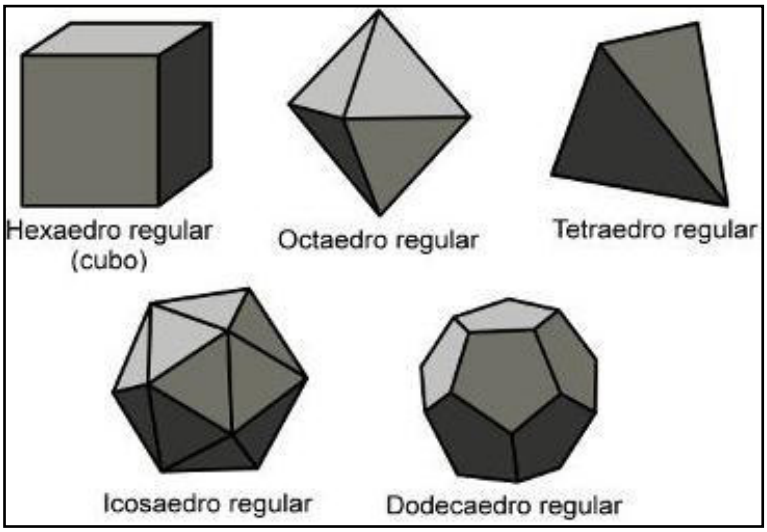


De forma geral reconhecemos que um poliedro é convexo, em relação a uma de suas faces, quando, ao passar um plano por qualquer uma de suas faces, deixa todas as outras faces situadas no mesmo lado do plano. Caso contrário, o poliedro será não convexo.



POLIEDRO REGULARES

São poliedros convexos em que todas as faces são polígonos regulares e iguais. Existem 5, e somente 5, poliedros regulares são: hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Esses poliedros também são chamados de poliedros de Platão.



Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poliedros-regulares.htm

RELAÇÃO DE EULER

Para todos os poliedros regulares, determine o número de faces, arestas e vértices. A seguir, veja se consegue encontrar alguma relação entre esses elementos.

Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre as arestas, faces e vértices de um poliedro convexo. Sendo A, o número de arestas, V, o número de vértices e F, o número de faces de um poliedro convexo, Euler descobriu que:

$$V - A + F = 2$$

Exemplo (FAAP – SP): Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

Resolução: Conforme o enunciado, sabe-se que: $A = V + 6$

Aplicando a Relação de Euler, temos: $V - A + F = 2$:

$$V - (V + 6) + F = 2 \Rightarrow -6 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 6 \Rightarrow F = 8$$

Resposta: Portanto, o número de faces é igual a 8.

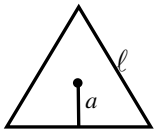
POLIEDROS

PRISMAS

Os prismas limitados são poliedros cujas faces da base são paralelas e formadas por polígonos planos congruentes. É limitado pelas faces laterais, compostas por paralelogramos. Os mais conhecidos são o cubo (hexaedro regular) e o paralelepípedo. Estão frequentemente presentes em questões de Matemática em vestibulares e provas de larga escala, que também contemplam os prismas de base hexagonal regular.

Primeiramente, relembraremos a área de figuras planas relevantes para a continuidade de nossos estudos, pois se configuram nos polígonos das bases mais frequentes:

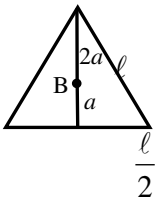
Triângulo Equilátero



$a = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{6}$	$h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$	$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
a (Apótema)	h (Altura)	A (Área)

Demonstração:

Seja B o baricentro do triângulo equilátero, que divide sua altura na proporção $2:1$, ou seja, $2a$ e a.



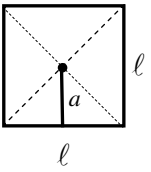
Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

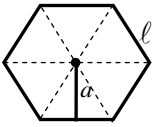
$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Como $3a = h$, então: $h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3a = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{6}$.

Para calcular sua área *A*, pode-se utilizar a expressão: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, sendo *b* sua base. Assim: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

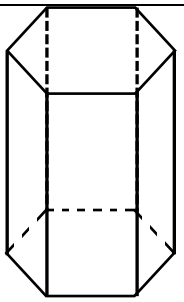
Quadrado		
	$a = \frac{\ell}{2}$ *a* (Apótema)	$A = \ell^2$ *A* (Área)

Hexágono Regular		
	$a = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$ *a* (Apótema)	$A = \frac{3\sqrt{3} \cdot \ell^2}{2}$ *A* (Área)

DESAFIO

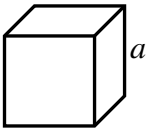
Demonstre as expressões de área e apótema do quadrado e do hexágono regular.

Posto isso, podemos estudar as expressões próprias de prismas:

	$A_T = 2 \cdot A_B + A_L$ A_T (Área Total) A_B (Área da Base) A_L (Área Lateral)	$V = A_B \cdot h$ V (Volume) A_B (Área da Base) h (Altura)

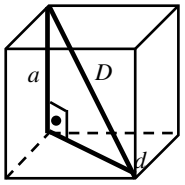
O cubo e o paralelepípedo possuem expressões próprias:

Cubo

	$A_B = a^2$ A_B (Área da Base)	$A_L = 4 \cdot a^2$ A_L (Área Lateral)	$A_T = 6 \cdot a^2$ A_T (Área Total)
	$d = a \cdot \sqrt{2}$ d (Diagonal das Bases ou das Faces)	$D = a \cdot \sqrt{3}$ D (Diagonal Interna do Cubo)	$V = a^3$ V (Volume)

Demonstração da Diagonal Interna do Cubo:

A diagonal da face do cubo é igual a $d = a \cdot \sqrt{2}$, pois se trata da diagonal do quadrado. A diagonal do cubo é calculada a partir do Teorema de Pitágoras:

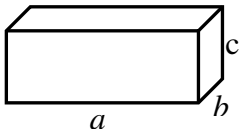


$$D^2 = d^2 + a^2$$
$$D^2 = \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 2a^2 + a^2$$
$$D^2 = 3a^2 \Rightarrow D = a \cdot \sqrt{3}$$

DESAFIO

Demonstre as expressões da área da base, lateral e total do cubo, além do volume.

Paralelepípedo reto-retângulo

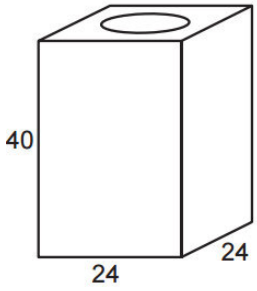
	$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ D (Diagonal Interna do Paralelepípedo)	$A_T = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ (Área Total)	$V = a \cdot b \cdot c$ V (Volume)

DESAFIO
Demonstre as expressões de diagonal, área total e volume do paralelepípedo reto-retângulo.

A legenda abaixo será utilizada em todo esse capítulo, inclusive nos exemplos a seguir:

$a =$ Apótema (figuras planas) ou Aresta (sólido)	$h =$ Altura
$A_{SM} =$ Área da Secção Meridiana	$g =$ Geratriz
$r =$ Raio da Base	$\ell =$ Aresta da Base
$D =$ Diagonal do Sólido	$d =$ Diagonal da Face
$A_B =$ Área da Base	$A_L =$ Área Lateral
$A_T =$ Área Total	$V =$ Volume

Exemplo 1 (ENEM – 2014): Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura. Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em:



a) 14,4% b) 20,0% c) 32,0% d) 36,0% e) 64,0%

Resolução: As dimensões fornecidas não precisam ser utilizadas; para a lata original podemos utilizar a nomenclatura *a*, *b*, *c*, sendo o último a altura da lata. Seu volume é $V_1 = a \cdot b \cdot c$. Como as dimensões da base serão 25% maiores, então assumirão os valores $1{,}25 \cdot a$ e $1{,}25 \cdot b$. Sendo *h* a altura da nova lata, seu volume será $V_2 = 1{,}25 \cdot a \cdot 1{,}25 \cdot b \cdot c = 1{,}5625 \cdot a \cdot b \cdot h$. Como o volume se mantém, pode-se igualar os volumes:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 1{,}5625 \cdot a \cdot b \cdot h \Rightarrow 1{,}5625 \cdot h = c \Rightarrow h = \frac{c}{1{,}5625} \Rightarrow h = 0{,}64 \cdot c$$

Como a altura da nova lata deve ser 64% da original, haverá redução de 36% da altura original.

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

Exemplo 2 (ENEM – 2009): Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

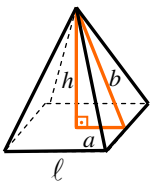
a) 4. b) 8. c) 16. d) 24. e) 32.

Resolução: O volume do cubo é $V = a^3 = 13824$, sendo "a" a medida de sua aresta. Extraindo-se a raiz cúbica de 13824, obtém-se $a = 24 \text{ cm}$. Como o diâmetro de cada esfera é $d = 2 \cdot r \Rightarrow d = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}$, conclui-se que em cada dimensão "cabem" 2 esferas, ou seja, a caixa comporta um total de esferas igual a $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

PIRÂMIDES

Conhecido pelas famosas pirâmides do Egito, esse sólido se caracteriza por uma base poligonal e um vértice fora do plano que contém a base, denominado vértice da pirâmide. A união de todos os segmentos ligando seu vértice a um ponto da sua base compõe as faces laterais triangulares. O sólido é composto pela base e pelas faces laterais triangulares. A seguir constam algumas expressões para a obtenção de determinadas medidas de uma pirâmide de base poligonal regular:

<table>
<tr>
<td> 

ℓ (Aresta da Base)</td>
<td>$b^2 = h^2 + a^2$
b (Apótema da Pirâmide ou Altura da Face Triangular)</td>
<td>$A_L = n \cdot \underbrace{\frac{\ell \cdot b}{2}}_{\text{Área de cada face triangular.}}$
n (indica o número de lados da base poligonal regular)</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$A_T = A_B + A_L$</td>
<td>$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$</td>
</tr>
</table>

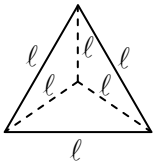
Demonstração da Área Lateral:

A face lateral da pirâmide é um triângulo de base ℓ e altura *b*. Dessa forma, a área de uma face lateral é dada por: $A = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot b$.

Com *n* faces laterais, basta multiplicar esse resultado por *n*, obtendo $A_L = n \cdot \frac{\ell \cdot b}{2}$.

Entre variados tipos de pirâmides, destaca-se o tetraedro regular. Neste tipo de pirâmide, cuja base é triangular, as seis arestas são congruentes entre si.

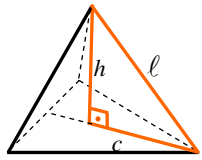
Tetraedro Regular



$h = \frac{\ell \cdot \sqrt{6}}{3}$	$g = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$
$A_B = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$A_B = A_L = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
$A_T = \ell^2 \cdot \sqrt{3}$	$V = \frac{\ell^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$

Demonstração da Altura do Tetraedro Regular:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado em laranja, temos: $\ell^2 = h^2 + c^2$.



Sendo $c = \frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero (que representa a base do tetraedro regular), ou seja, $c = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{3}$, então:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{3} \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{2 \cdot \ell^2}{3} \Rightarrow h = \frac{\ell \cdot \sqrt{6}}{3}$$

DESAFIO

Demonstre as expressões da área da base, área total, geratriz e volume do tetraedro regular.

Exemplo 3 (UNESP – 2011): Há 4500 anos, o Imperador Quéops do Egito mandou construir uma pirâmide regular que seria usada como seu túmulo. As características e dimensões aproximadas dessa pirâmide hoje, são:

1.ª) Sua base é um quadrado com 220 metros de lado;

2.ª) Sua altura é de 140 metros.

Suponha que, para construir parte da pirâmide equivalente a $1{,}88\times10^4\ \text{m}^3$, o número médio de operários utilizados como mão de obra gastava em média 60 dias. Dados que $2{,}2^2\times1{,}4\cong6{,}78$ e $2{,}26\div1{,}88\cong1{,}2$ e mantidas estas médias, o tempo necessário para a construção de toda pirâmide, medido em anos de 360 dias, foi de, aproximadamente,

a) 20. b) 30. c) 40. d) 50. e) 60.

Resolução: O volume da pirâmide é dado por $V=\frac{1}{3}\cdot A_B\cdot h$. Sendo a base da pirâmide um quadrado cujo lado mede 220 metros e sua altura igual a 140 metros, temos:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\overbrace{(220)^2}^{\text{Área da Base}}\cdot\overbrace{140}^{\text{Altura}}=\frac{1}{3}\cdot(2{,}2\cdot100)^2\cdot(1{,}4\cdot100)=\frac{1}{3}\cdot\overbrace{2{,}2^2\cdot1{,}4}^{\cong6{,}78}\cdot\underbrace{100^2}_{10^4}\cdot\underbrace{100}_{10^2}=$$

$$=\frac{6{,}78}{3}\cdot10^6=2{,}26\cdot10^6\ \text{m}^3$$

Para calcular o tempo de construção da pirâmide, basta dividir seu volume pela capacidade construída em 60 dias:

$$\frac{\overbrace{2{,}26\cdot10^6}^{\text{Volume}}}{\underbrace{1{,}88\cdot10^4}_{\substack{\text{Capacidade}\\ \text{construídaem}\\ 60\text{dias.}}}}=1{,}2\cdot10^2=120\ \text{períodos de 60 dias, ou seja,}$$

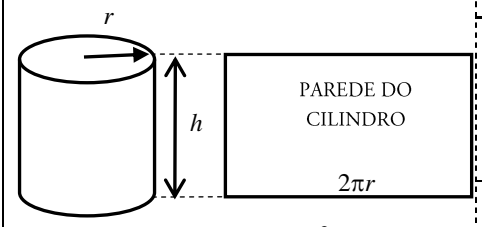
$$120\cdot2\ \text{meses}=240\ \text{meses}=20\ \text{anos}$$

Resposta: A alternativa correta é a letra a.

CORPOS REDONDOS

CILINDROS

Semelhante ao prisma, o cilindro possui duas bases em planos paralelos, só que no formato circular. Suas expressões são dadas por:



$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$A_B = \pi \cdot r^2$

$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$

$A_{SM} = 2 \cdot r \cdot h$

$A_T = 2 \cdot A_B + A_L$

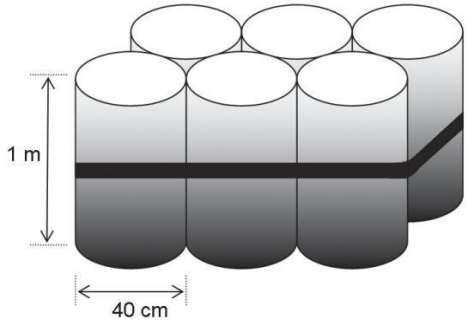
$A_T = 2 \cdot (\pi \cdot r^2) + 2\pi \cdot r \cdot h$

$A_T = 2\pi r \cdot (r + h)$

$h = 2r$

(Para cilindro equilátero.)

Exemplo 4 (ENEM – 2010): O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado. Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de (considere $\pi = 3$)



a) R$ 86,40. b) R$ 21,60. c) R$ 8,64. d) R$ 7,20. e) R$ 1,80.

Resolução: O diâmetro da base de cada cilindro mede 40 cm, sendo assim o raio da base é $20\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{m}$. O volume V do kit é igual ao sêxtuplo do volume de um cilindro, ou seja:

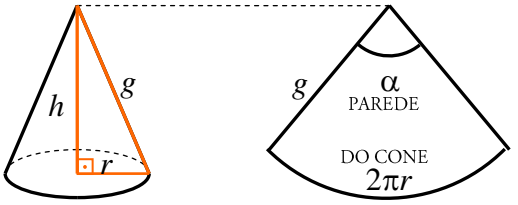
$$V = 6 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 6 \cdot 3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 1 = 0{,}72\ \text{m}^3$$

Utilizando o kit 12 vezes, a família despenderá $12 \cdot 0{,}72 = 8{,}64\ \text{m}^3$. O custo final será de $8{,}64 \cdot 2{,}50 = \text{R\$}\ 21{,}60$.

Resposta: A alternativa correta é a letra b.

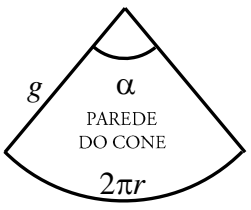
CONES

Quase similar à pirâmide, o cone também apresenta um vértice e apenas uma base, que é circular. Suas expressões principais são:



$g^2 = h^2 + r^2$	$A_B = \pi \cdot r^2$	$A_{SM} = r \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
$\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{g}$	$A_L = \pi \cdot r \cdot g$	$A_T = A_B + A_L$ $A_T = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$ $A_T = \pi \cdot r \cdot (r + g)$	$g = 2 \cdot r$ (Para cone equilátero.)

Demonstração da Área Lateral:



De acordo com a geometria Euclidiana: $\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{g}$. A área lateral consiste em um setor circular. Para calculá-la, pode-se lançar mão de uma regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} (2\pi)360^\circ & \rightarrow & \pi \cdot g^2 \\ \alpha & \rightarrow & A_L \end{array} \Rightarrow A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

Exemplo 5 (UNESP – 2014): Prato da culinária japonesa, o temaki é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de

folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha. Um temaki típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um temaki típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse temaki, é de

a) 46. b) 58. c) 54. d) 50. e) 62.

Resolução: Sendo o diâmetro da base igual a 8 cm, conclui-se que seu raio mede 4 cm. O volume V de salmão corresponde a 90% do volume do cone, sendo então igual a:

$$V = 0{,}9 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = 0{,}9 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 0{,}9 \cdot \frac{3 \cdot 4^2 \cdot 10}{3} = 144 \text{ cm}^3$$

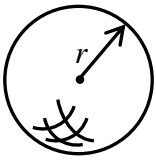
Para calcular a massa m de salmão contida em um temaki é necessário multiplicar sua densidade com seu volume:

$$m = 0{,}35 \cdot 144 = 50{,}4 \text{ g}$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **d.**

ESFERAS

Conhecida como bola, possui apenas uma dimensão principal: seu raio.

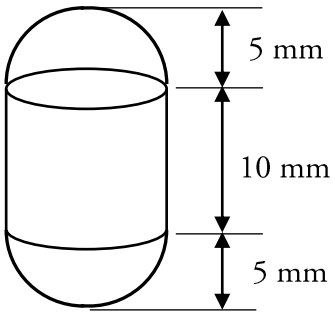
	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Exemplo 6 (ENEM – 2014): Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado. Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas

pílulas. Use 3 como valor aproximado para π. A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

a) 168. b) 304. c) 306. d) 378. e) 514.

Resolução: A figura a seguir as medidas fornecidas pela questão. Nota-se que a pílula é formada por um cilindro cuja base circular possui raio igual a 5 mm e altura 10 mm, além de uma esfera (2 semiesferas) de raio 5 mm. Seu volume V_1 é dado por:



$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 3 \cdot 5^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 5^3 = 1250 \text{ mm}^3$$

O volume V_2, após as alterações, é calculado como:

$$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 3 \cdot 4^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 4^3 = 736 \text{ mm}^3$$

A diferença entre os volumes resulta em 514 mm^3.

Resposta: A alternativa correta é a letra e.

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

8 TRIGONOMETRIA

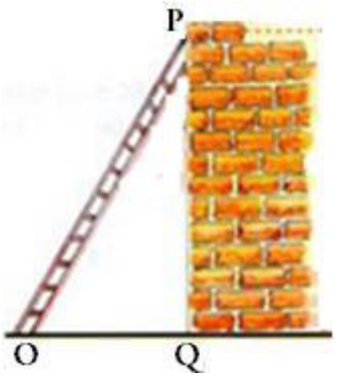
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A Trigonometria está presente em diversas situações cotidianas, sendo considerada um dos mais antigos estudos da humanidade. A relação das medidas de comprimento com os valores dos ângulos surgiu da necessidade de calcular distâncias inacessíveis, sendo os estudos relacionados à Astronomia, e Navegação os primeiros a usarem as relações trigonométricas. A Trigonometria (trigo: triângulo, metria: medidas) é o estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Nos triângulos que não possuem ângulo reto, as condições são adaptadas na busca pela relação entre os ângulos e os lados.

CONCEITO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

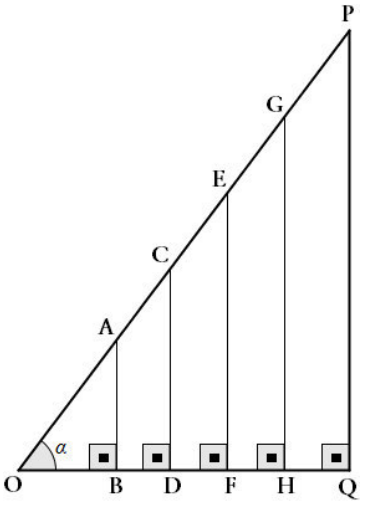
Na figura ao lado, uma escada está apoiada em um muro de 4 metros de altura. O comprimento da escada é de 5 m e a distância da base da escada até o muro é de 3 metros. O triângulo formado em OPQ é retângulo em Q, ou seja, o ângulo de 90º está em Q com catetos OQ e QP e hipotenusa OP.



Ao meio dia, se subirmos degrau por degrau, a sombra do seu pé no chão irá mudar de posição, pois se formam aí triângulos retângulos semelhantes, conforme esquema do tópico seguinte:

RELAÇÕES EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS SEMELHANTES

Toma-se o triângulo POQ subdividido conforme a figura seguinte, no qual OP = 5 m, OQ = 3 m e PQ = 4 m.



Os triângulos AOB, COD, EOF, GOH são todos semelhantes, no qual se observam as seguintes razões:

1.ª razão: $\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = \frac{QP}{OP} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

2.ª razão: $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \frac{OQ}{OP} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

3.ª razão: $\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = \frac{QP}{OQ} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$

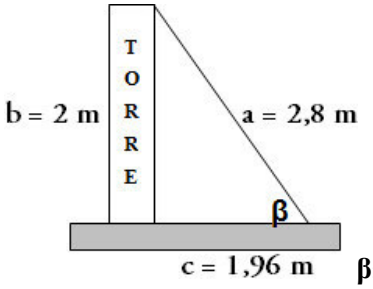
Essas razões no triângulo retângulo recebem nomes especiais: **Seno**, **Cosseno** e **Tangente**, respectivamente.

Definição: Consideremos um ângulo agudo α, levando-se em conta os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α, todos são semelhantes. É a partir desse princípio que se estabelecem as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Assim, denominamos de:

- seno de um ângulo: a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.
- cosseno de um ângulo: a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.
- tangente de um ângulo: a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo são chamadas ***razões trigonométricas*** desse ângulo. Observe um exemplo a seguir:

Uma torre de TV é sustentada por um cabo de 2,8 m de comprimento fixado no chão, conforme mostra a figura. A altura da torre é de 2 m e o ponto de fixação do cabo está a 1,96 m da base da torre. Calcule o seno, cosseno e tangente do ângulo que o cabo forma com o chão.



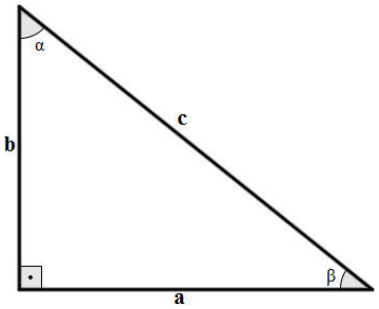
β: seja β o ângulo que o cabo forma com o chão

Calculando as requeridas razões trigonométricas, temos:

$$sen\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{2,80} \cong 0,71429 \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{1,96}{2,80} = 0,7 \qquad tg\,\beta = \frac{b}{c} = \frac{2}{1,96} \cong 1,02041$$

RELAÇÕES ENTRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

As razões trigonométricas de um mesmo ângulo têm relações entre si, observe-as:



$sen\,\beta = \frac{b}{c}$, então $b = c \cdot sen\,\beta$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$, então $a = c \cdot \cos\beta$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto})^2 + (\text{Cateto})^2$$

Substituindo conforme as relações encontradas há pouco:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (c \cdot \cos\beta)^2 + (c \cdot sen\,\beta)^2$$

Desenvolvendo:

$$c^2 = c^2 \cdot (\cos\beta)^2 + c^2 \cdot (sen\,\beta)^2$$

Colocando c^2 em evidência:

$$c^2 = c^2 \cdot \left[(\cos\beta)^2 + (sen\,\beta)^2\right]$$

Isolando $(\cos\beta)^2 + (sen\,\beta)^2$:

$$\frac{c^2}{c^2} = \left[(\cos\beta)^2 + (sen\,\beta)^2\right]$$

Concluindo:

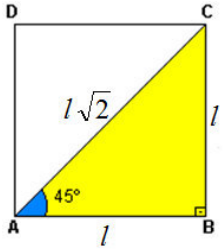
$$(\cos\beta)^2 + (sen\,\beta)^2 = 1$$

Calculando o quociente $\frac{sen\,\beta}{\cos\beta}$ temos: $\frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = tg\,\beta$

Então, $tg\,\beta = \frac{sen\,\beta}{\cos\beta}$.

SENO, COSSENO E TANGENTE DE 45º

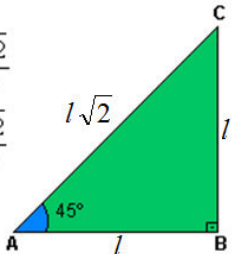
Na figura seguinte temos um quadrado de lado *l*. Ao traçarmos sua diagonal (que mede $l\sqrt{2}$, conforme aprendemos por Pitágoras), indicamos um triângulo retângulo, como mostra a segunda figura. Observe que os ângulos agudos medem 45º:



$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}\cdot 1}{\cancel{l}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}\cdot 1}{\cancel{l}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$

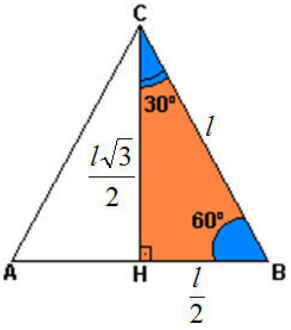


Assim, temos que:

$$sen\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\,45^\circ = 1$$

SENO, COSSENO E TANGENTE DE 60º

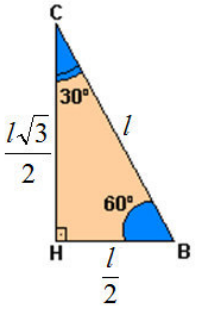
Na figura inicial temos um triângulo eqüilátero de lado l cujos três ângulos são iguais a 60º. Ao traçarmos sua altura (que mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, conforme o teorema de Pitágoras), indicamos um triângulo retângulo, como mostra a segunda figura.



$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$

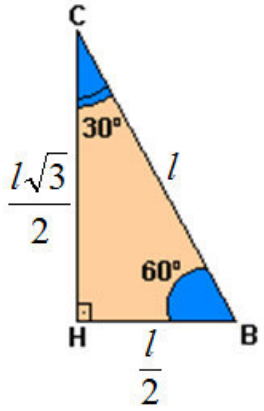


Assim, temos que:

$$sen\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad tg\,60^\circ = \sqrt{3}$$

SENO, COSSENO E TANGENTE DE 30º

Utilizando o triângulo BCH denotado no tópico anterior, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{1\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1.2}{2.1\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim:

$$sen\ 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Deste modo, podemos construir uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente de alguns dos principais ângulos.

x	$sen\ x$	$\cos x$	$tg\ x$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

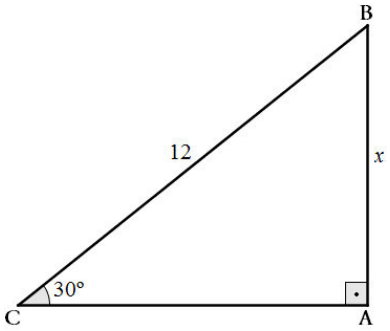
Observe que o seno de 30º é igual ao cosseno de 60º e que o seno de 60º é igual ao cosseno de 30º. Isso ocorre porque os ângulos de 30º e 60º são chamados complementares, isto é, somam 90º.

Os ângulos 30°, 45° e 60° são chamados notáveis por aparecerem freqüentemente em cálculos.

DETERMINAÇÃO DE UM LADO DESCONHECIDO

Consideremos o triângulo retângulo ABC com as seguintes medidas:

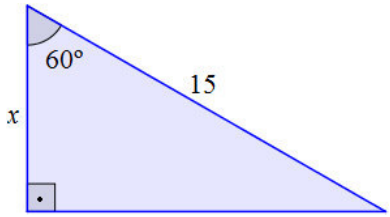
ângulo agudo: 30º, hipotenusa: 12 e cateto oposto: x



A razão trigonométrica que relaciona cateto oposto e hipotenusa é o seno. Assim, para calcular o valor de x fazemos: $sen\,30^\circ = \frac{x}{12}$. Utilizando o valor de $sen\,30^\circ$, temos: $\frac{1}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$.

Observe, a seguir, alguns exemplos:

Exemplo 1: Calcule x no triângulo abaixo:



α: 60º

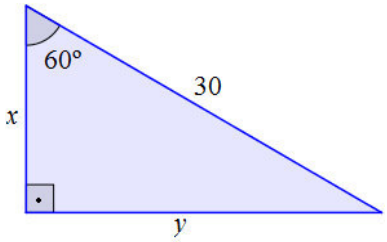
Hipotenusa: 15

Cateto adjacente ao ângulo α: x

A razão trigonométrica que envolve o cateto adjacente e a hipotenusa é o cosseno, assim: $\cos 60^\circ = \frac{x}{15}$. Utilizando o valor de $\cos 60^\circ$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{15} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7{,}5$$

Exemplo 2: Calcule x e y no triângulo abaixo:



α: 60º

Hipotenusa: 30

Cateto adjacente ao ângulo α: x

Cateto oposto ao ângulo α: y

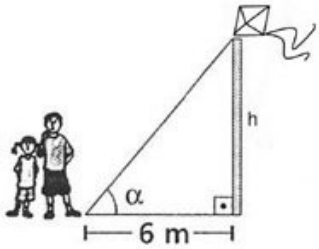
Para descobrir x utilizamos o cosseno (razão do cateto oposto com a hipotenusa) e para descobrir o y utilizamos o seno (razão do cateto adjacente com a hipotenusa):

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{y}{30} \qquad \cos 60^\circ = \frac{x}{30}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{30} \Rightarrow 2y = 30\sqrt{3} \Rightarrow y = 15\sqrt{3} \qquad \frac{1}{2} = \frac{x}{30} \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ao empinar uma pipa, Paulo percebeu que estava a uma distância de 6 m do poste onde a pipa enroscou. Ana notou que o ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era de 60º, como mostra a figura. Calcule a altura do poste.

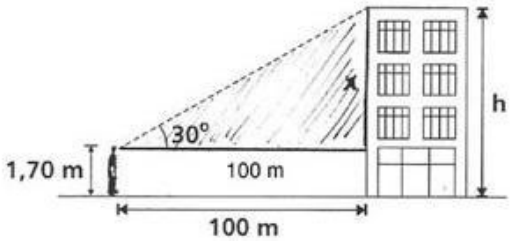


$$tg\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$tg\ 60^\circ = \frac{h}{6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6\sqrt{3}\ \text{m}$$

Um observador de 1,70 m de altura a 100 m de distância da base de um prédio vê o topo desse prédio sob um ângulo de 30º com a horizontal, conforme mostra a figura. **Qual é a altura do prédio?**



$$tg\ 30^\circ = \frac{x}{100}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{100} \Rightarrow 3x = 100\sqrt{3} \Rightarrow$$

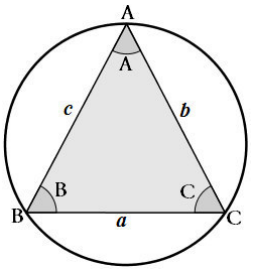
$$\Rightarrow x = \frac{100\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \cong 57{,}7\ \text{m}$$

Para obter a altura h do prédio, acrescenta-se ao valor de x a altura do observador: $h = 1{,}70 + x \Rightarrow h = 1{,}70 + 57{,}7 \Rightarrow h \cong 59{,}4\ \text{m}$.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

TEOREMA DOS SENOS

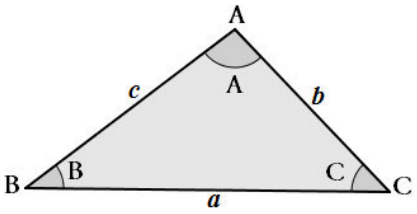
Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Assim, segundo o teorema dos senos, temos que:



$$\frac{a}{sen\ \text{A}} = \frac{b}{sen\ \text{B}} = \frac{c}{sen\ \text{C}} = 2R$$

TEOREMA DOS COSSENOS

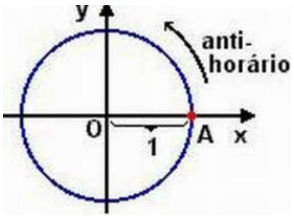
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. Segundo enuncia o teorema dos cossenos, temos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

CICLO TRIGONOMÉTRICO

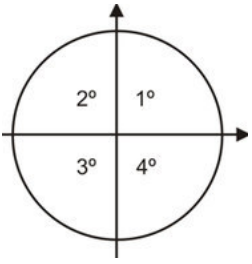
O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio unitário. A orientação é:



Positiva: no sentido anti-horário

Negativa: no sentido horário

O ciclo trigonométrico é divido em quatro quadrantes determinados pelos eixos cartesianos:

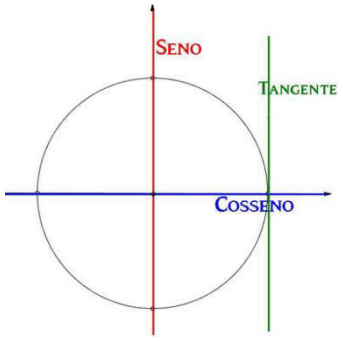


- 1º quadrante: contém a extremidade dos arcos 0 e 90º ou 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad.
- 2º quadrante: contém a extremidade dos arcos 90º e 180º ou $\frac{\pi}{2}$ e π rad.

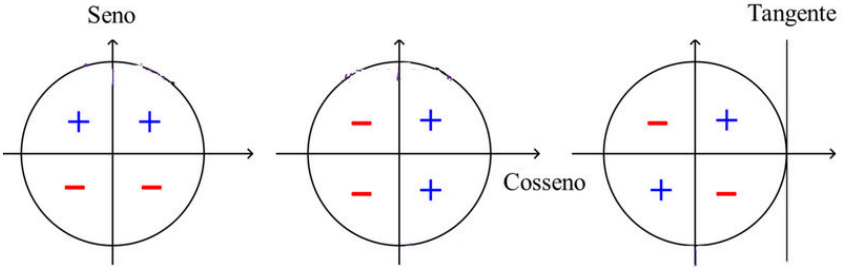
- 3º quadrante: contém a extremidade dos arcos 180º e 270º ou π e $\frac{3\pi}{2}$ rad.
- 4º quadrante: contém a extremidade dos arcos 270º e 360º ou $\frac{3\pi}{2}$ e 2π rad.

SENO, COSSENO E TANGENTE NO CICLO

Eixos

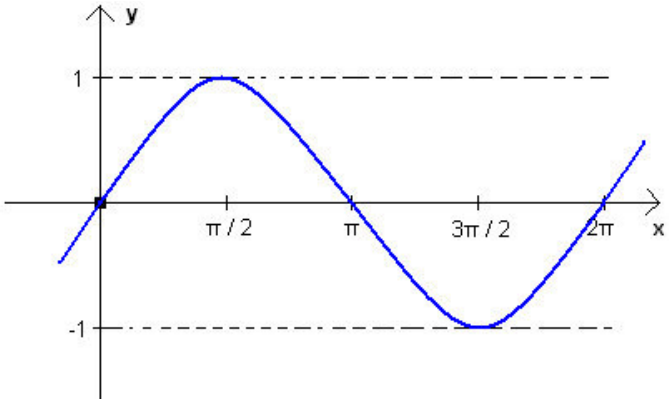


Sinais



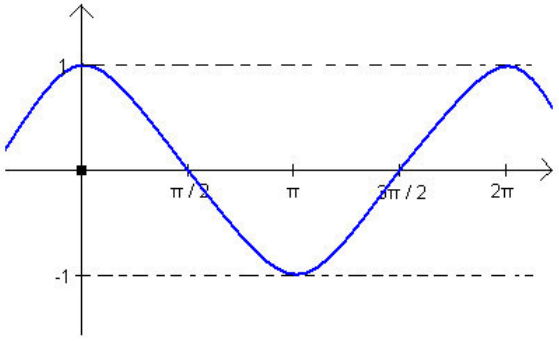
FUNÇÕES CIRCULARES: GRÁFICOS

A função seno é uma função que associa a cada número real x o seno de x: $f(x) = sen\ x$. Como x é um número real, dizemos que o domínio da função é . Os valores de $sen\ x$ estão entre -1 e 1. Neste caso, a imagem da função é o intervalo $[-1, 1]$. Todos os valores do seno se repetem após uma volta completa, então o período da função seno é 2π. O gráfico da curva obtida pela função seno é chamado senóide.



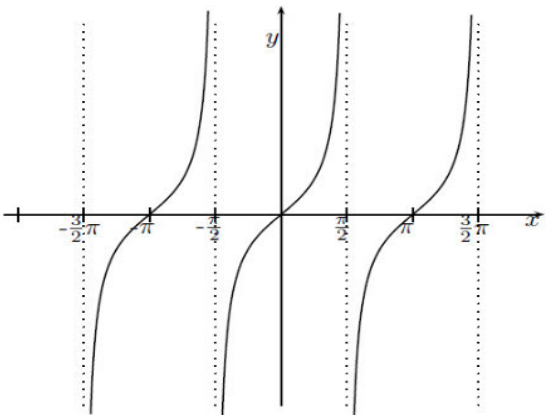
D =
Im (*f*) = {y∈ / $-1 \leq y \leq 1$}
p = 2π

A função cosseno é toda função que associa um número real x ao cosseno de x: $f(x) = \cos\ x$. O domínio da função é . E o conjunto-imagem da função é o intervalo $[-1,\ 1]$. Assim como a função seno, o período da função cosseno é 2π. O gráfico da função cosseno é chamado cossenóide.



D =
Im (*f*) = {y∈ / $-1 \leq y \leq 1$
}
p = 2π

A função tangente é toda função que associa um número real x à tangente de x: $f(x) = tg\ \ x$. Devemos lembrar que a função tangente não está definida para arcos que têm como arcos côngruos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e, portanto, estes devem ser excluídos do domínio da função. Na função tangente, note que os valores se repetem a cada π rad, então o período da função tangente é π.



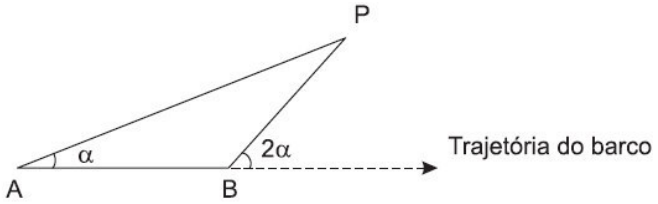
$D = \{x \in \mid x \neq \frac{\pi}{2} + h\pi,\ h \in \}$

$Im\ (f) =$

$p = \pi$

Observe, a seguir, alguns exemplos:

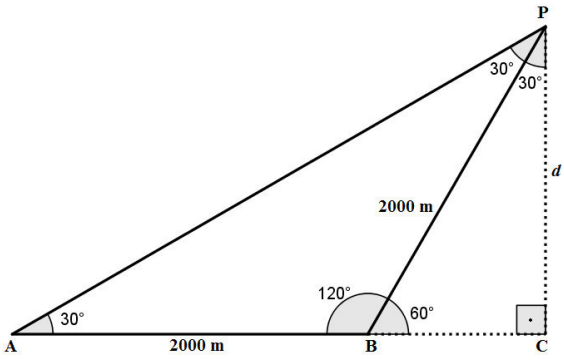
Exemplo 1 (ENEM – 2011): Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo de 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e ao chegar ao ponto B, verificou-se que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\ m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto P fixo será:

a) 1000 m b) $1000\sqrt{3}$ m c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m d) 2000 m e) $2000\sqrt{3}$ m

Resolução: A partir dos dados denotados no enunciado, é possível a elaboração da seguinte figura:



Observações:
O triângulo ABP é isósceles, pois os ângulos da base AP possuem a mesma medida (30º). Assim, $\overline{BP} = 2000$.
O segmento $\overline{CP} = d$ representa a menor distância do barco ao ponto P. Para obtê-lo, e considerando o triângulo retângulo BCP, pode-se utilizar as razões trigonométricas $\cos 30^\circ$ ou $sen\, 60^\circ$.

A seguir, observe o cálculo utilizando $\cos 30^\circ$:

$$\cos 30º = \frac{d}{2000\,\text{m}} \Rightarrow d = 2000\,\text{m} \cdot \cos 30º \Rightarrow d = 2000\,\text{m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 1000\sqrt{3}\,\text{m}$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

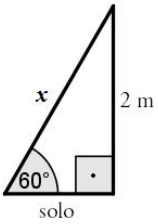
Exemplo 2 (UEMG – 2011): Observe a tirinha abaixo:

Os personagens da turma da Mônica sobem uma rampa empurrando um carrinho. Supondo que o triângulo demonstrativo da rampa seja retângulo, de

altura igual a 2 metros, e que essa rampa forme um ângulo de 60° com o solo, a distância percorrida pelo carrinho até o ponto mais alto da rampa foi de

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m d) 1 m e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m

Resolução: Utilizando os dados denotados no enunciado, é possível construir o seguinte triângulo:



Para calcular a distância percorrida pelo carrinho até o ponto mais alto, pode-se utilizar a razão trigonométrica $sen\,60^\circ$, ficando:

$$sen\,60^\circ = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x \cdot \sqrt{3} = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

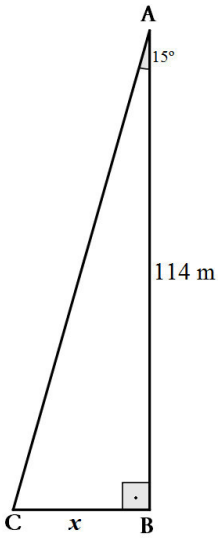
Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

Exemplo 3 (ENEM – 2013): As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) menor que 100 m²
b) entre 100 m² e 300 m²
c) entre 300 m² e 500 m²
d) entre 500 m² e 700 m²
e) maior que 700 m²

Resolução: A partir da figura e dos dados do enunciado, é possível construir o seguinte triângulo retângulo ABC:



O segmento $\overline{BC} = x$ coincide com um dos lados do quadrado que constitui a base do prédio. Aplicando a razão trigonométrica $tg\ 15^\circ$ no referido triângulo, é possível obter x:

$$tg\ 15^\circ = \frac{x}{114} \Rightarrow 0{,}26 = \frac{x}{114} \Rightarrow x = 114 \cdot 0{,}26 \Rightarrow x = 29{,}64\ \text{m}$$

Calculando a área da base (quadrada) do prédio, temos:

$$A_{BASE} = x^2 \Rightarrow A_{BASE} = (29{,}64)^2 \Rightarrow A_{BASE} = 878{,}5296\ \text{m}^2$$

Assim, a área da base desse prédio é maior que 700 m².

Resposta: A alternativa correta é a letra **e.**

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ARCO DUPLO

Antes de iniciarmos o estudo de arco duplo temos vamos recordar as transformações trigonométricas:

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As fórmulas a seguir permitem calcular o cosseno, o seno e a tangente da soma e da diferença de dois ângulos:

$$sen\,(x+y) = sen\,x \cdot \cos y + sen\,y \cdot \cos x$$

$$sen\,(x-y) = sen\,x \cdot \cos y - sen\,y \cdot \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - sen\,x \cdot sen\,y$$

$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+sen\,x\cdot sen\,y$
$tg(x+y)=\dfrac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}$
$tg(x-y)=\dfrac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y}$

Considere um arco da circunferência trigonométrica de 30º, o seu arco duplo será 60º. O $sen\,30^\circ=\dfrac{1}{2}$; já o $sen\,60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, portanto, percebemos que embora 60º seja o dobro de 30°, o $sen\,30^\circ$ não é o dobro do $sen\,60^\circ$. Tal situação se aplica a outros arcos e funções trigonométricas.

FÓRMULAS DO ARCO DUPLO

Seja θ um arco, para encontrar o valor das funções trigonométricas de um arco duplo ($sen\,2\theta$, $\cos 2\theta$ e $tg\,2\theta$) teremos que seguir algumas relações, entre um arco θ e o seu arco duplo 2θ.

Cos 2θ

Segundo a adição de arcos, $\cos 2\theta$ é igual a:

$$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cdot\cos\theta-sen\,\theta\cdot sen\,\theta=\cos^2\theta-sen^2\,\theta$$

Portanto, o cálculo do $\cos 2\theta$ será feito através da seguinte fórmula:

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-sen^2\,\theta$$

Sen 2θ

Segundo a adição de arcos, $\operatorname{sen} 2\theta$ é igual a:

$$sen\,2\theta = sen\,(\theta+\theta) = sen\,\theta\cdot\cos\theta + sen\,\theta\cdot\cos\theta = 2\cdot sen\,\theta\cdot\cos\theta$$

Portanto, o cálculo do $sen\,2\theta$ será feito através da seguinte fórmula:

$$sen\,2\theta = 2\cdot sen\,\theta\cdot\cos\theta$$

$Tg\,2\theta$

Segundo a adição de arcos, $tg\,2\theta$ é igual a:

$$tg\,2\theta = tg\,(\theta+\theta) = \frac{tg\,\theta + tg\,\theta}{1 - tg\,\theta\cdot tg\,\theta} = \frac{2\cdot tg\,\theta}{1 - tg^2\,\theta}$$

Portanto, o cálculo do $tg\,2\theta$ será feito através da seguinte fórmula:

$$tg\,2\theta = \frac{2\cdot tg\,\theta}{1 - tg^2\,\theta}$$

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

9 MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

MATRIZES

Matrizes são tabelas numéricas onde os números estão dispostos em linhas e colunas. O conceito de matrizes é amplamente utilizado em computação. As matrizes costumam ser nomeadas com letras maiúsculas acrescidas de um índice $m \times n$ que indica o formato ou o tipo da matriz, sendo m linhas e n colunas (m e n são números naturais diferentes de 0). Os elementos de uma matriz costumam ser representados pela mesma letra usada para nomear a matriz só que utilizando minúscula e acrescida de um índice composto por dois números inteiros positivos. Este índice designa a posição do elemento na matriz. Exemplo: Matriz $A_{3\times3}$ (onde A é o nome da matriz e a representação numérica representa a quantidade de linhas e colunas, nesta ordem, que a matriz possui) elemento $a_{3\times2}$ (isto é, o elemento que está na linha 3 coluna 2).

LEI DE FORMAÇÃO DAS MATRIZES

Toda matriz pode ser declarada através de uma lei de formação para seus elementos, a qual consiste numa função ordinal de duas variáveis. Essas variáveis assumem os valores dos índices que designam a posição (linha e coluna) de cada elemento da matriz. Assim, obtemos o valor de um elemento a_{ij} (i representa a linha e j representa a coluna) de uma matriz $A_{m\times n}$, calculando a imagem da função no ponto $(i,\ j)$, ou seja, $a_{ij} = f(i,\ j)$. Por exemplo:

Escrever a matriz $A_{2\times2}$ utilizando a seguinte lei de formação: $a_{ij} = 2i - j$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix}$ escrevendo a matriz, temos: $A = \begin{bmatrix} 2\cdot1-1 & 2\cdot1-2 \\ 2\cdot2-1 & 2\cdot2-2 \end{bmatrix}$

Assim, obtemos a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Conforme determinadas características, algumas matrizes recebem denominações especiais. Observe, a seguir, algumas destas classificações:

CLASSIFICAÇÃO DAS MATRIZES

1) <u>Matriz Quadrada</u>: é toda matriz cujo número de linhas é igual o número de colunas, ou seja, $m = n$. Observe dois exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

A é uma matriz quadrada de ***ordem*** 2.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ -8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B é uma matriz quadrada de ***ordem*** 3.

Em uma matriz quadrada, os elementos $a_{1\times1}, a_{2\times2}, a_{3\times3}, \ldots, a_{n\times n}$ formam a **diagonal principal** da matriz. Note que estes elementos são os do tipo a_{ij} com $i = j$. Já a outra diagonal é a **secundária**, cujos elementos são os do tipo a_{ij} com $i + j = n + 1$. Observe:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

1.1) <u>Matriz Triangular</u>: é toda matriz quadrada cujos elementos acima **ou** abaixo da diagonal principal são todos nulos. Veja dois exemplos:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O elemento nulo $c_{2\times1}$ está abaixo da diagonal principal.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Os elementos nulos $(d_{1\times2}, d_{1\times3}$ e $d_{2\times3})$ estão acima da diagonal principal.

Note que, em uma matriz triangular, $a_{ij} = 0$ para $i > j$ **ou** $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

1.2) <u>Matriz Diagonal</u>: é toda matriz quadrada cujos elementos acima **e** abaixo da diagonal principal são todos nulos. Observe dois exemplos:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{-6}{5} & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Veja que, em uma matriz diagonal, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

1.3) Matriz Identidade: é toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são unitários e todos os outros são nulos. Para identificá-la, utiliza-se o símbolo I_n. Observe três exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que, em uma matriz identidade, temos: $\begin{cases} a_{ij} = 1, \text{para } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{para } i \neq j \end{cases}$.

2) **Matriz Nula:** é toda matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Para identificá-la, utiliza-se o símbolo $0_{m \times n}$. Observe três exemplos:

$$0_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veja que, para identificar a matriz nula, que também é quadrada, utiliza-se a simbologia 0_n.

3) Matriz Oposta: Consideremos a matriz A. A matriz oposta de A (cuja representação é $-A$) é aquela que possui elementos opostos correspondentes ao da matriz A. Observe o exemplo seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Note que obtemos a matriz $-A$ mudando os sinais de todos os elementos da matriz A.

4) <u>Matriz Transposta</u>: Sendo A e B duas matrizes de formatos $m \times n$ e $n \times m$, respectivamente. Dizemos que a matriz B é a transposta da matriz A quando as linhas da matriz B são as colunas da matriz A na mesma ordem.

$$B = A^t \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

Consideremos o seguinte exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ A matriz transposta é dada por: $$B = A^t = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERAÇÃO ENTRE MATRIZES

A seguir apresentam-se algumas operações envolvendo matrizes.

ADIÇÃO

Consideremos as matrizes A e B de mesmo tipo $m \times n$. Define-se adição (ou soma) da matriz A com a matriz B, representado por $A + B$, a matriz C (do mesmo tipo $m \times n$) em que cada elemento é obtido adicionando os elementos correspondentes de A e B. Assim:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemplificando, observe a adição das matrizes $A_{2\times3}$ e $B_{2\times3}$ a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ -3 & 5 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+(-1) & 0+3 & -1+2\\ -3+2 & 5+(-5) & 7+1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 8\end{bmatrix}=C_{2\times 3}$$

SUBTRAÇÃO

Consideremos as matrizes A e B de mesmo tipo $m\times n$. Define-se diferença (ou subtração) entre a matriz A e a matriz B, representado por $A-B$, a soma da matriz A com a matriz oposta de B. A matriz C, resultante desta diferença, é do mesmo tipo $m\times n$. Assim:

$$C=A-B=A+(-B)\Leftrightarrow c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})$$

Observe a diferença entre as matrizes $A_{1\times 4}$ e $B_{1\times 4}$ a seguir:

$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 4 & 7\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 4 & 7\end{bmatrix}}^{A}-\overbrace{\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & 8\end{bmatrix}}^{B}=\overbrace{\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 4 & 7\end{bmatrix}}^{A}+\overbrace{\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & -8\end{bmatrix}}^{-B}=$$

$$=\overbrace{\begin{bmatrix}1+(-3) & \frac{1}{2}+2 & 4+0 & 7+(-8)\end{bmatrix}}^{A+(-B)}=\overbrace{\begin{bmatrix}-2 & \frac{5}{2} & 4 & -1\end{bmatrix}}^{C_{1\times 4}}$$

Note que, a diferença $B-A$, resulta em uma matriz diferente:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & 8\end{bmatrix}}^{B}-\overbrace{\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 4 & 7\end{bmatrix}}^{A}=\overbrace{\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & 8\end{bmatrix}}^{B}+\overbrace{\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & -4 & -7\end{bmatrix}}^{-A}=$$

$$=\overbrace{\begin{bmatrix}3+(-1) & -2+\left(-\frac{1}{2}\right) & 0+(-4) & 8+(-7)\end{bmatrix}}^{B+(-A)}=\overbrace{\begin{bmatrix}2 & -\frac{5}{2} & -4 & 1\end{bmatrix}}^{D_{1\times 4}}$$

Observe que $A-B\neq B-A$ e $B-A=D=-C=-(A-B)$.

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

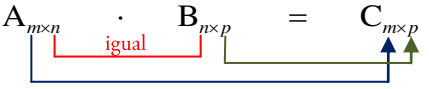
Consideremos a matriz A do tipo $m \times n$ e o número real α. Define-se produto αA a matriz $B = b_{ij}$ (de mesmo tipo $m \times n$) tal que $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ para todo i e todo j. Por exemplo:

a) $\overset{\alpha}{2} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix}}^{A_{3\times3}} = \begin{bmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot5 & 2\cdot1 \\ 2\cdot3 & 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot0 \\ 2\cdot(-6) & 2\cdot4 & 2\cdot8 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -12 & 8 & 16 \end{bmatrix}}^{B_{3\times3}}$

b) $\overbrace{-\frac{1}{3}}^{\alpha} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}}^{A_{1\times2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\cdot1 & -\frac{1}{3}\cdot3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}}^{B_{1\times2}}$

MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES

Consideremos a matriz A do tipo $m \times n$ e a matriz B do tipo $n \times p$. O produto da matriz A pela matriz B é a matriz C, do tipo $m \times p$, de tal modo que cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se, **ordenadamente**, os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos j, da matriz B, e adicionando-se os produtos obtidos. A matriz C pode ser indicada como AB.



Observe como se realiza esta multiplicação "***ordenada***" tomando, como exemplo, a seguinte multiplicação entre as matrizes $A_{3\times2}$ e $B_{2\times3}$:

$$A_{3\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B_{2\times3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}^{A_{3\times 2}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}^{B_{2\times 3}} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21}) & (a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22}) & (a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23}) \\ (a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21}) & (a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22}) & (a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23}) \\ (a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21}) & (a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22}) & (a_{31}\cdot b_{13} + a_{32}\cdot b_{23}) \end{bmatrix} = C_{3\times 3}$$

Observações: a) Geralmente, $A \cdot B \neq B \cdot A$, pois a multiplicação entre matrizes não é comutativa.

b) Pode-se ter $A \cdot B = 0$, mesmo que $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Observe a resolução de dois exemplos envolvendo a multiplicação entre matrizes.

Exemplo 1: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, verificar a condição de existência dos produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e, se possível, calculá-los.

Resolução: A multiplicação $A \cdot B$ é possível, pois o número de colunas da matriz $A\ (j = 2)$ é igual ao número de linhas da matriz $B\ (i = 2)$. A multiplicação ocorre da seguinte forma:

$$A_{2\times 2} \cdot B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 3 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 3\cdot 1 & 0\cdot 0 + 3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Já a multiplicação $B \cdot A$ não é possível, pois o número de colunas da matriz $B\ (j = 3)$ não é igual ao número de linhas da matriz $A\ (i = 2)$.

Exemplo 2 (UFRGS – 1996): A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3 desse restaurante.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix} \qquad P = \begin{matrix} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3 é:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Resolução: Para determinar a matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3, basta multiplicar a matriz P pela matriz C. Observe:

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

DETERMINANTES

Determinante é um número real associado a toda matriz quadrada. Faz-se válido pontuar que ***não existe*** determinante de matriz que não seja quadrada.

Observe, nos tópicos seguintes, como é realizado o cálculo do determinante conforme a ordem da matriz quadrada:

DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 1

Em matrizes de ordem 1, o determinante é igual ao elemento a_{11}:

$$\det A_{1\times1} = a_{11}$$

Por exemplo, o determinante da matriz $C = [-8]$ é $\det C = c_{11} = -8$.

DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 2

Consideremos a matriz A de ordem 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. O cálculo do seu determinante se dá por meio do produto dos elementos da diagonal principal ***menos*** o produto dos elementos da diagonal secundária. Para representá-lo, pode-se utilizar qualquer uma das seguintes maneiras:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Por exemplo: Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. O seu determinante será:

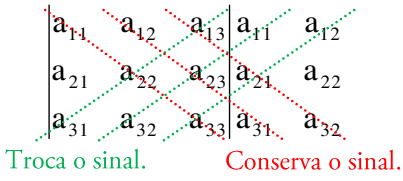
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 10 - 12 = -2 \qquad \text{ou} \qquad \det B = -2$$

DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 3 (REGRA DE SARRUS)

Consideremos a matriz A de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para calcular o seu determinante, pode-se utilizar a **regra de Sarrus**. Para tanto, inicialmente, repetem-se as duas primeiras colunas à direita da matriz e efetuam-se as seis multiplicações conforme indicadas a seguir:



Os produtos provenientes de mesma direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal: $(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})$, $(a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})$ e $(a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$. Já os produtos provenientes de mesma direção da diagonal

secundária mudam de sinal: $-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$, $-(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$ e $-(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$.

Por último, adicionam-se tais produtos para a obtenção do determinante:

$$\det A = \overbrace{(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})}^{\text{produtos da diagonal principal}} + \underbrace{+[-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})] + [-(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})] + [-(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})]}_{\text{produtos da diagonal secundária}}$$

Observe o cálculo do determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ utilizando tal regra:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 4) + (1 \cdot 2 \cdot 3) + (-1 \cdot 1 \cdot 1)}^{\text{produtos da diagonal principal}} + \overbrace{[-(-1 \cdot 2 \cdot 3)] + [-(2 \cdot 2 \cdot 1)] + [-(1 \cdot 1 \cdot 4)]}^{\text{produtos da diagonal secundária}} =$$

$$= 16 + 6 + (-1) + 6 + (-4) + (-4) = 28 - 9 = 19$$

Logo, $\det B = 19$.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

As propriedades denotadas a seguir visam facilitar o cálculo do determinante em algumas situações.

1.ª Propriedade (linhas ou colunas de zeros): Se todos os elementos de uma coluna (ou de uma linha) de uma matriz quadrada forem iguais a zero, então, o seu determinante será igual a zero. Observe os seguintes exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 \cdot (-1) - [(0 \cdot 1 \cdot -4) + (-1 \cdot 3 \cdot 0) + (2 \cdot 0 \cdot 5)] = 0$

2.ª Propriedade (linhas ou colunas iguais): Se os elementos correspondentes de duas colunas (ou duas linhas) de uma matriz quadrada forem iguais, então, o seu determinante será igual a zero. Veja dois exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 3 - \left[(2 \cdot 5 \cdot 1) + (3 \cdot 6 \cdot 2) + (1 \cdot 7 \cdot 3) \right] = 0$

3.ª Propriedade (linhas ou colunas proporcionais): Se duas colunas (ou duas linhas) de uma matriz quadrada forem proporcionais, então, o seu determinante será igual a zero. Observe dois exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 - 1 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - \left[(1 \cdot 3 \cdot 2) + (3 \cdot 5 \cdot 1) + (8 \cdot 3 \cdot 1) \right] = 0$

4.ª Propriedade (multiplicação de uma linha (ou coluna) por uma constante): Se todos os elementos de uma coluna (ou de uma linha) de uma matriz quadrada são multiplicados por uma constante α, então, o seu determinante também será multiplicado por α. Veja o exemplo seguinte:

Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$. Note que todos os elementos da 1.ª coluna da matriz B são o quíntuplo em relação aos elementos correspondentes da 1.ª coluna da matriz A. Assim, conforme a 4.ª propriedade, temo que $\det B = 5 \cdot \det A$. Calculando os determinantes de ambas, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\det A=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 5-(-1)\cdot 4=10+4=14\\ \det B=\begin{vmatrix}10 & -1\\ 20 & 5\end{vmatrix}=10\cdot 5-(-1)\cdot 20=50+20=70\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}\det B=5\cdot\det A\\ 70=5\cdot 14\end{array}$$

5.ª Propriedade (multiplicação da matriz por uma constante): Se uma matriz A, quadrada de ordem n, é multiplicada por uma constante real α, então, o seu determinante ficará multiplicado por α^n, ou seja: $\det(\alpha\cdot A_n)=\alpha^n\cdot\det A_n$. Veja o exemplo a seguir:

A multiplicação da matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 9\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix}$ pela constante $\alpha=-2$ resulta na matriz $B=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -18\\ -6 & 2 & -8\\ -2 & -8 & -12\end{bmatrix}$. Conforme a 5.ª propriedade, temos que:

$$\det\overbrace{(\alpha\cdot A_n)}^{B_n}=\alpha^n\cdot\det A_n\Rightarrow\det B_3=(-2)^3\cdot\det A_3\Rightarrow\det B_3=-8\cdot\det A_3$$

Calculando os determinantes de A e de B, verificamos tal igualdade:

$$\det A=2\cdot(-1)\cdot 6+0\cdot 4\cdot 1+9\cdot 3\cdot 4-[1\cdot(-1)\cdot 9+4\cdot 4\cdot 2+6\cdot 3\cdot 0]=73$$

$$\begin{array}{l}\det B=(-4)\cdot 2\cdot(-12)+0\cdot(-8)\cdot(-2)+(-18)\cdot(-6)\cdot(-8)\\ -[(-2)\cdot 2\cdot(-18)+(-8)\cdot(-8)\cdot(-4)+(-12)\cdot(-6)\cdot 0]=\\ \quad=96+0-864-(72-256+0)=-584\end{array}$$

$$\det B_3=-8\cdot\det A_3\Rightarrow -584=-8\cdot(73)\Rightarrow -584=-584$$

6.ª Propriedade (determinante da transposta): Os determinantes de uma matriz quadrada A e de sua transposta A^t são iguais, ou seja, $\det A=\det A^t$. Observe o exemplo seguinte:

Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ e sua transposta $A^t=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$. Calculando os seus determinantes, é possível verificar a 6.ª propriedade:

$$\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-15=-14\Rightarrow \det A=-14 \qquad \begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1-15=-14\Rightarrow \det A^t=-14$$

7.ª Propriedade (troca de linhas ou colunas paralelas): Se a posição de duas colunas (ou de duas linhas) de uma matriz quadrada A for trocada, então o determinante da nova matriz B (constituída a partir desta troca) será o oposto do determinante da matriz A. Veja o seguinte exemplo:

Consideremos a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3\\ 4 & 7 & 5\end{bmatrix}$. A matriz $B=\begin{bmatrix}4 & 7 & 5\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ é resultante da troca da 1.ª pela 3.ª linha da matriz A. Conforme a 7.ª propriedade, $\det B=-\det A$:

$$\left.\begin{array}{l}\det A=30+36+7-(12+42+15)=73-69=4\\ \det B=12+42+15-(30+36+7)=69-73=-4\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}\det B=-\det A\\ -4=-4\end{array}$$

8.ª Propriedade (determinante da matriz triangular): Em uma matriz triangular, o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Observe os exemplos a seguir:

a) $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\overbrace{-1\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}^{\text{produto da diagonal principal}}-2\cdot 0=\frac{3}{4}$

b)

$$\begin{vmatrix}1 & 8 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\overbrace{1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}^{\text{produto da diagonal principal}}+8\cdot 3\cdot 0+4\cdot 0\cdot 0-\left[0\cdot 2\cdot 4+0\cdot 3\cdot 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0\cdot 8\right]=-1$$

9.ª Propriedade (teorema de Binet): Sejam A e B duas matrizes quadradas, de mesma ordem, e AB a matriz produto. Conforme o teorema de Binet, temos que:

$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$$

A esse respeito, veja o exemplo seguinte:

Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz produto $AB = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 22 & 11 \end{bmatrix}$. Calculando os seus determinantes, é possível verificar a 9.ª propriedade (teorema de Binet):

$$\left.\begin{array}{l} \det A = 3\cdot 5 - 1\cdot 4 = 15 - 4 = 11 \\ \det B = (-8)\cdot 2 - 6\cdot 1 = -16 - 6 = -22 \\ \det AB = 0\cdot 11 - 22\cdot 11 = -242 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \det(AB) = (\det A)\cdot(\det B) \\ -242 = 11\cdot(-22) \\ -242 = -242 \end{array}$$

10.ª Propriedade (teorema de Jacobi): Consideremos a matriz quadrada A. Se multiplicarmos todos os elementos de uma coluna (ou linha) pelo mesmo número α e adicionarmos os produtos aos elementos correspondentes de outra coluna (ou linha), constituindo uma nova matriz B, então os determinantes de A e B serão iguais. Tal propriedade é exemplificada a seguir:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. O número $\alpha = 2$ é multiplicado aos elementos da 2.ª linha e os produtos são adicionados aos elementos correspondentes da 1.ª linha, resultando na matriz $B = \begin{bmatrix} 3+\overbrace{(4)}^{\alpha\cdot 2} & 1+\overbrace{(10)}^{\alpha\cdot 5} \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculando os determinantes de A e B é possível verificar o teorema de Jacobi (10.ª propriedade):

$$\left.\begin{array}{l} \det A = 3\cdot 5 - 2\cdot 1 = 15 - 2 = 13 \\ \det B = 7\cdot 5 - 2\cdot 11 = 35 - 22 = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \det A = \det B$$

Outra propriedade (**11.ª Determinante da Inversa**) será abordada adiante.

REGRA DE CHIÓ

A regra de Chió permite baixar, em uma unidade, a ordem de uma matriz quadrada A, sem alterar o valor do seu determinante. A regra prática de Chió consiste-se em:

1.ª etapa) Escolher um elemento $a_{ij} = 1$ (caso não exista, aplicar as propriedades anteriormente abordadas para que apareça o elemento 1).

2.ª etapa) Suprimir a linha (i) e a coluna (j) do elemento $a_{ij} = 1$, obtendo-se o ***menor complementar do elemento*** $a_{ij} = 1$.

3.ª etapa) Subtrair, de cada elemento do ***menor complementar***, o produto dos elementos que ficam nos 'pés' das perpendiculares traçadas do elemento considerado às filas suprimidas. Assim, obter-se-á uma nova matriz.

4.ª etapa) Multiplicar o determinante obtido na 3.ª etapa por $(-1)^{i+j}$, onde i e j designam as ordens da linha e da coluna às quais pertence o elemento $a_{ij} = 1$.

Por exemplo:

Seja $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ a matriz quadrada de ordem 4. Para calcular o seu determinante utiliza-se a regra de Chió para baixar a ordem de M_4 em uma unidade e, em seguida, pode-se aplicar a regra de Sarrus para obter o determinante da nova matriz obtida. Como há um elemento $a_{11} = 1$ na matriz M_4, então é possível utilizar as etapas da regra de Chió:

$$M_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right] =$$

Menor complementar de $a_{ij} = 1$

$$= \begin{bmatrix} 3-(2\cdot 1) & 6-(0\cdot 1) & 9-((-1)\cdot 1) \\ 1-(2\cdot 4) & 2-(0\cdot 4) & 0-((-1)\cdot 4) \\ 2-(2\cdot(-2)) & 3-(0\cdot(-2)) & -4-((-1)\cdot(-2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ -7 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Como a matriz obtida (via regra de Chió) $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ -7 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ é de ordem 3, então utiliza-se a regra de Sarrus para calcular o seu determinante:

$$\det M_3 = -12+144+(-210)-(120+12+252) = -462$$

Assim, $\overbrace{\det M_4 = \det M_3}^{\text{São iguais (regra de Chió).}} = -462$.

Note que, como há um elemento $a_{11} = 1$ na matriz M_3, então é possível, novamente, aplicar a regra de Chió de modo a obter uma matriz de ordem 2, cujo determinante é resolvido mais facilmente. Observe:

$$M_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 6 & 10 \\ \hline -7 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2-(6\cdot(-7)) & 4-(10\cdot(-7)) \\ 3-(6\cdot 6) & -6-(10\cdot 6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 74 \\ -33 & -66 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante da matriz obtida M_2, temos:

$$\det M_2 = \begin{vmatrix} 44 & 74 \\ -33 & -66 \end{vmatrix} = 44\cdot(-66)-[74\cdot(-33)] = -2904+2442 = -462$$

Observe que o determinante obtido é igual ao das matrizes M_3 e M_4.

Observação: A 4.ª etapa foi suprimida, em ambos os cálculos, pois $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$.

COFATOR DE UMA MATRIZ

O conceito de cofator é utilizado no estudo do teorema de Laplace (cálculo de determinantes de matrizes de ordens quaisquer). Temos que cada elemento de uma matriz quadrada possui o seu respectivo cofator, sendo esse cofator um valor numérico, o qual é obtido através da expressão a seguir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot D_{ij}, \text{ em que:}$$

- A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} da matriz A;
- D_{ij} será o determinante da matriz obtida através da matriz A, que deverá excluir da matriz A os elementos da linha i e da coluna j referentes ao elemento a_{ij}.

Observe o seguinte exemplo:

Determine os cofator do elemento a_{11} da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução: O cofator do elemento a_{11} será determinado pela seguinte expressão:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}$$

Antes de calcular o determinante D_{11} é necessário, inicialmente, obter uma nova matriz (que denominamos D) excluindo-se a 1.ª linha e a 1.ª coluna da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det D = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 20 = D_{11}$$

Assim, $A_{11} = (-1)^2 \cdot 20 = 20$.

Resposta: O cofator do elemento a_{11} da matriz é 20.

MATRIZ INVERSA

Consideremos a matriz quadrada A, de ordem n. Define-se a ***matriz inversa*** de A, denominada A^{-1} (de mesma ordem n), àquela cuja multiplicação entre A e A^{-1} resulte na matriz identidade, ou seja, $A \cdot A^{-1} = I$. Para que exista a matriz inversa de A, é necessário que o seu determinante seja diferente de zero, ou seja, $\det A \neq 0$. Neste caso, dizemos que A é uma matriz ***invertível*** ou ***não-singular***.

Retomando a 11.ª propriedade de determinantes, temos que: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Para obter a matriz inversa de uma matriz quadrada qualquer, observe as etapas denotadas no exemplo seguinte:

Obter a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, de ordem 2:

1.ª etapa: Calcula-se o determinante da matriz A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$$

2.ª etapa: Calcula-se o cofator de cada elemento da matriz A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^2 \cdot 5 = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2$$

3.ª etapa: Representa-se a matriz dos cofatores (obtidos na etapa anterior):

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

4.ª etapa: Representa-se a ***matriz adjunta*** que é a ***matriz transposta*** da matriz dos cofatores (obtida na etapa anterior): $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

5.ª etapa: Divide-se cada elemento da matriz adjunta pelo determinante da matriz A (calculado na 1.ª etapa): $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = A^{-1}$

A matriz obtida na 5.ª etapa é a **matriz inversa** de A.

Para saber se a matriz obtida é a inversa, basta verificar se a multiplicação entre A e A^{-1} resulta na matriz identidade:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{4}\right) & 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 3 \cdot \frac{2}{4} \\ 2 \cdot \frac{5}{4} + 5 \cdot \left(-\frac{2}{4}\right) & 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 5 \cdot \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Em relação à 11.ª propriedade dos determinantes, temos:

$\det A = 4$ (Já calculado anteriormente.)

$$\det A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{vmatrix} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{4} - \left[\left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{10}{16} - \frac{6}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Note que a 11.ª propriedade é satisfeita, pois:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

A seguir apresenta-se a resolução de uma questão do ENEM envolvendo o conceito de multiplicação entre matrizes.

Exemplo (ENEM – 2012): Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por.

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Resolução: Para calcular a média aritmética das notas dos 4 bimestres deve-se somá-las e, em seguida, dividi-las por 4. A matriz 4×4 obtida pelas notas (denotadas na tabela) deve ser multiplicada por uma matriz 'coluna' 4×1, na qual cada um dos quatro elementos é igual a $\frac{1}{4}$. Assim, a matriz procurada será:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **e.**

SISTEMAS LINEARES

Observe a resolução do exemplo, a seguir, na qual serão discutidas algumas ideias envolvendo sistemas lineares:

Exemplo (ENEM – 2015): Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30 b) 36 c) 50 d) 60 e) 64

Resolução: Inicialmente, consideremos as incógnitas x e y como representando, respectivamente, o acerto e o erro. A partir do enunciado, sabe-se que:

$x+y=80$ [1.ª equação: indica o total de tiros (acertados e errados) dados pelo participante]

$20\cdot x-10\cdot y=100$ [2.ª equação: indica o valor recebido pelo participante, considerando que a cada acerto (x) é pago o valor de R$ 20,00 ($+20\cdot x$) e, a cada erro (y), é subtraído o valor de R$ ($-10\cdot y$).]

Como ambas as incógnitas relacionam-se a uma mesma situação, então é necessário representar tais equação (denominadas **equações lineares**) em um único sistema (denominado **sistema de equações lineares**):

$$\begin{cases} x+y=80 & (1.^{\text{a}}\ \text{equação}) \\ 20x-10y=100 & (2.^{\text{a}}\ \text{equação}) \end{cases}$$

Equação linear é toda equação que pode ser representada da seguinte forma:

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=b$, em que:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as ***incógnitas*** (em nosso exemplo, as incógnitas foram denominadas x e y);
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados ***coeficientes*** das incógnitas (no exemplo, o coeficiente das incógnitas x e y da 1.ª equação

é 1; já os coeficientes respectivos de x e y, da 2.ª equação, são 20 e -10);

- b é o ***termo independente*** (os termos independentes da 1.ª e 2.ª equações do exemplo são, respectivamente, 80 e 100).

Assim, um **sistema de equações lineares** é um conjunto S com "m" equações lineares em n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que pode ser representado como:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O sistema de equações lineares do nosso exemplo é do tipo 2×2 ($m=2$ e $n=2$). Para resolvê-lo, ou seja, determinar o seu conjunto **solução**, é possível valer-se de diferentes métodos. Observe-os a seguir:

Método da Adição: Realiza-se uma (ou mais) operação(s) elementar(s) na(s) equação(s) do sistema de modo a eliminar uma das incógnitas quando tais equações são adicionadas. Retomando o nosso sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 80 & (1.^{\text{a}}\ \text{equação}) \\ 20x - 10y = 100 & (2.^{\text{a}}\ \text{equação}) \end{cases}$$

Note que, dividindo a 2.ª equação por 10, obtém-se $2x - y = 10$. Adicionado esta equação com a 1.ª equação, a incógnita da 2.ª equação é eliminada:

$$+\begin{cases} x + y = 80 \\ \underline{2x - y = 10} \end{cases}$$
$$3x = 90 \Rightarrow x = 30$$

Para obter o valor de y, basta substituir o valor de x na 1.ª equação:

$$x + y = 80 \Rightarrow 30 + y = 80 \Rightarrow y = 50$$

Assim, o conjunto solução deste sistema de equações lineares 2×2 é $\left(\overbrace{30}^{x};\ \overbrace{50}^{y}\right)$. Como o exemplo foi retirado de uma questão de múltipla escolha, então, a alternativa correta – referente ao número de acertos do tiro ao alvo – é a letra **a.**

Embora o exemplo foi resolvido a partir do método da adição, utilizando este mesmo sistema serão exemplificados outros métodos de resolução para um sistema de equações lineares $m\times n$. Dependendo do sistema apresentado, opte pelo método que melhor convier (seja em questão de facilidade e/ou agilidade nos cálculos).

Método da Substituição: Em uma das equações do sistema, isola-se uma das incógnitas:

$$\begin{cases} x+y=80 \Rightarrow y=80-x & (1.^{\text{a}}\ \text{equação}) \\ 20x-10y=100 & (2.^{\text{a}}\ \text{equação}) \end{cases}$$

Em seguida, substitui-se tal valor $(y=80-x)$ na 2.ª equação:

$$20x-10y=100 \Rightarrow 20x-10(80-x)=100 \Rightarrow 20x-800+10x=100 \Rightarrow x=30$$

Para determinar o valor de y, substitui-se o valor obtido de $x=30$ na equação 1.ª equação:

$$x+y=80 \Rightarrow 30+y=80 \Rightarrow y=50$$

Como esperado, o conjunto solução encontrado é o mesmo obtido por meio do método da adição.

Método de Escalonamento (Gauss): Um sistema de equações lineares é considerado **escalonado** quando o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de uma equação para a outra. Por exemplo, os sistemas seguintes estão escalonados:

a) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ \boxed{0x+}\, y+2z=8 \\ \boxed{0x+0y+}\, z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2r+s+t-3u=8 \\ \boxed{0r+}\, -s+3t+u=3 \\ \boxed{0r+0s+}\, 5t+7u=2 \\ \boxed{0r+0s+0t+}\, u=1 \end{cases}$

Para escalonar um sistema de equações lineares, algumas operações elementares podem ser realizadas, a saber:

a) Trocar a posição das equações;

b) Multiplicar (ou dividir) todos os membros de uma equação por um mesmo número real diferente de zero de modo a se obter uma equação equivalente;

c) Adicionar os membros da equação equivalente (obtida em b) aos membros correspondentes de outra equação do sistema.

Por exemplo, observe o escalonamento do sistema referente à questão do ENEM:

$$\begin{cases} x+y=80 & (1.^{a}\ \text{equação}) \\ 20x-10y=100 & (2.^{a}\ \text{equação}) \end{cases}$$

Multiplica-se a 1.ª equação por -20 (item b) e, em seguida, adiciona-se esta equação (equivalente) à 2.ª equação (item c):

$$+\begin{cases} -20x-20y=-1600 & (1.^{a}\ \text{equação equivalente}) \\ 20x-10y=100 & (2.^{a}\ \text{equação}) \end{cases}$$

$$0x-30y=-1500 \Rightarrow 30y=1500 \Rightarrow y=50$$

Assim, obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} y=50 & (1.^{a}\ \text{equação}) \\ 20x-10y=100 & (2.^{a}\ \text{equação}) \end{cases}$$

Para obter o sistema escalonado, basta trocar a posição das equações (item a):

$$\begin{cases} 20x-10y=100 \\ y=50 \end{cases}$$

A determinação da incógnita x se dá mediante a substituição de $y=50$ na equação $20x-10y=100$:

$20x-10\cdot 50=100\Rightarrow 20x-500=100\Rightarrow x=30$.

<u>Observação</u>: Independentemente do número de equações (m) e incógnitas (n) do sistema de equações lineares, o seu escalonamento dar-se-á mediante a utilização dos itens (de algum(s), ou de todos) denotados anteriormente.

Regra de Cramer: Este método permite a resolução de um sistema de equações lineares por meio de determinantes, desde que o determinante da ***matriz quadrada dos coeficientes*** seja diferente de zero. Retomemos a representação geral de um sistema de equações lineares $m\times n$:

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

A **matriz dos coeficientes** (ou **matriz incompleta M.I.**) e a **matriz completa** (**M.C.**) – formada a partir de **M.I.** acrescentando-se uma coluna contendo os termos independentes – apresentam-se a seguir:

$$\text{M.I.}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{M.C.}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Considerando o exemplo do tiro ao alvo, observe as etapas constituintes da regra de Cramer:

1.a etapa: Calcula-se o determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{bmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D = 1\cdot(-10) - 20\cdot 1 = -10 - 20 = -30$$

2.ª etapa: Calcula-se um 'novo' determinante para cada uma das incógnitas. Para obter as matrizes (referentes a cada uma das incógnitas), substitui-se, na matriz dos coeficientes, a coluna dos coeficientes da incógnita a ser determinada pela coluna dos termos independentes:

$$D_x = \begin{bmatrix} 80 & \overset{y}{1} \\ 100 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_x = 80\cdot(-10) - 100\cdot 1 = -800 - 100 = -900$$

coluna dos termos independentes

$$D_y = \begin{bmatrix} \overset{x}{1} & 80 \\ 20 & 100 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_y = 1\cdot 100 - 20\cdot 80 = 100 - 1600 = -1500$$

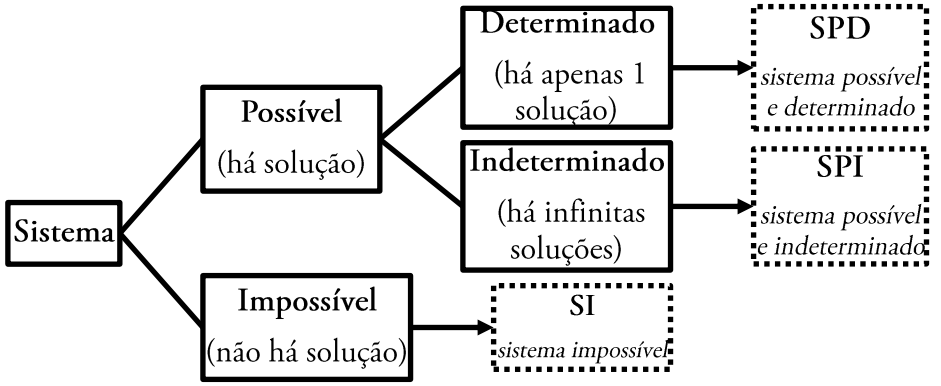
coluna dos termos independentes

3.ª etapa: Para determinar o valor de cada incógnita, divide-se cada um dos determinantes (obtidos na 2.ª etapa) por D (determinante da matriz dos coeficientes):

$$x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{-900}{-30} = 30 \qquad y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow x = \frac{-1500}{-30} = 50$$

<u>Observação</u>: Para utilizar a regra de Cramer, o sistema linear deve ser do tipo $n \times n$ (ou seja, o número de equações deve ser igual ao número de incógnitas), com $D \neq 0$.

Conforme apresentado nos 4 métodos de resolução (***Adição***, ***Substituição***, ***Escalonamento*** ou ***Gauss*** e ***regra de Cramer***), o sistema advindo da questão do ENEM é um **sistema possível e determinado**, cuja **única** solução é $(30;\ 50)$. Entretanto, nem sempre um sistema é *possível* e *determinado* (SPD). De acordo com a sua solução, é possível classificar os sistemas em:



Observação 1: No caso de um sistema de equações lineares 2×2, é possível estabelecer tal classificação, analisando apenas as equações, através das seguintes condições:

1.ª condição: Se as duas equações não tiverem os coeficientes das mesmas incógnitas em ambas as equações proporcionais, então o sistema é possível e determinado (**SPD**). Em representação matemática, temos:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=\alpha_1 \\ a_2x+b_2y=\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \qquad \text{Ex.: } \begin{cases} x+y=5 \\ -x+2y=6 \end{cases} \Rightarrow \frac{\overset{a_1}{\overbrace{1}}}{\underbrace{-1}_{a_2}}\neq\frac{\overset{b_1}{\overbrace{1}}}{\underbrace{2}_{b_2}}$$

2.ª condição: Se as duas equações forem totalmente proporcionais, então o sistema é possível e indeterminado (**SPI**). Equações deste tipo são denominadas ***equações equivalentes***. Em linguagem matemática, temos:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=\alpha_1 \\ a_2x+b_2y=\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad \text{Ex.: } \begin{cases} 5x+2y=-3 \\ 10x+4y=-6 \end{cases} \Rightarrow \frac{\overset{a_1}{\overbrace{5}}}{\underbrace{10}_{a_2}}=\frac{\overset{b_1}{\overbrace{2}}}{\underbrace{4}_{b_2}}=\frac{\overset{\alpha_1}{\overbrace{-3}}}{\underbrace{-6}_{\alpha_2}}$$

3.ª condição: Se as duas equações tiverem apenas os coeficientes das mesmas incógnitas em ambas as equações proporcionais (e os termos independentes não tiverem na mesma proporção), então o sistema é impossível (**SI**). Equações deste tipo são chamadas ***incompatíveis***. Em simbologia matemática, temos:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=\alpha_1 \\ a_2x+b_2y=\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad \text{Ex.: } \begin{cases} 5x+2y=-3 \\ 10x+4y=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\overbrace{5}^{a_1}}{\underbrace{10}_{a_2}}=\frac{\overbrace{2}^{b_1}}{\underbrace{4}_{b_2}}\neq\frac{\overbrace{-3}^{\alpha_1}}{\underbrace{4}_{\alpha_2}}$$

Observação 2: Para classificar um sistema escalonado, basta analisar a última linha, mesmo que esta seja $0=0$. Assim, na última linha pode-se encontrar:

1.ª situação: Uma equação do 1.º grau com uma incógnita, por exemplo, $5x=3$. Neste caso, o sistema é possível e determinado (**SPD**).

2.ª situação: Uma igualdade sem incógnitas que é verdadeira, por exemplo, $0=0$, $-1=-1$, etc. Neste caso, o sistema é possível e indeterminado (**SPI**).

3.ª situação: Uma igualdade sem incógnitas que é falsa, por exemplo, $0=5$, $1=-1$, etc. Neste caso, o sistema é impossível (**SI**).

Nos exemplos a seguir, veja a resolução de um sistema impossível (**SI**) e um possível e indeterminado (**SPI**):

Exemplo: Resolva e classifique os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} 2x+4y+8z=0 \\ 4x+6y-2z=0 \\ 2x-28z=0 \end{cases}$

Este tipo de sistema, no qual todos os termos independentes são nulos, é denominado ***sistema linear homogêneo***.

Resolução: Para resolver este sistema podemos utilizar o método de escalonamento. Inicialmente, realizam-se as seguintes operações:

- Divide-se a 2.ª equação por -2 e, em seguida, adiciona-se esta equação equivalente à 1.ª.
- Divide-se a 3.ª equação por -1 e, em seguida, adiciona-se esta equação equivalente à 1.ª.

$$+\begin{cases} 2x+4y+8z=0 \\ \underline{-2x-3y+z=0} \end{cases} \qquad +\begin{cases} 2x+4y+8z=0 \\ \underline{-2x+28z=0} \end{cases}$$

$$0x+y+9z=0 \qquad 4y+36z=0$$

Assim, obtém-se o sistema equivalente: $\begin{cases} 2x+4y+8z=0 \\ y+9z=0 \\ 4y+36z=0 \end{cases}$.

Em seguida, divide-se a 3.ª equação por -4 e, em seguida, adiciona-se esta equação equivalente à 2.ª:

$$+\begin{cases} y+9z=0 \\ \underline{-y-9z=0} \\ 0=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x+4y+8z=0 \\ y+9z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como a última linha do sistema representa uma igualdade sem incógnitas que é verdadeira $0=0$, então podemos classificá-lo como ***possível*** e ***indeterminado*** (SPI).

Considerando $z=\alpha$, temos:

$$y+9z=0 \Rightarrow y+9\alpha=0 \Rightarrow y=-9\alpha$$

$$2x+4y+8z=0 \Rightarrow 2x+4\cdot(-9\alpha)+8\alpha=0 \Rightarrow 2x-36\alpha+8\alpha=0 \Rightarrow x=14\alpha$$

Assim, o conjunto solução do sistema é $(14\alpha;-9\alpha;\alpha)$. Como a solução está 'em função' de α, então há uma infinidade de possíveis soluções. Por exemplo, considerando $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$, temos como soluções, respectivamente, $(14;-9;1)$ ou $(-14;\ 9;\ -1)$.

b) $\begin{cases} 3x+15y+6z=3 \\ 2x+10y+4z=10 \end{cases}$

Resolução: Novamente, utilizamos o método de escalonamento. Inicialmente, multiplica-se a 1.ª equação por (-2) e a 2.ª por (-3). Em seguida, adicionam-se as equações, obtendo-se o sistema equivalente apresentado adiante:

$$+\begin{cases} -6x-30y-12z=-6 \\ \underline{6x+30y+12z=30} \\ 0=-24 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x+15y+6z=3 \\ 0=-24 \end{cases}$$

Como a última linha do sistema representa uma igualdade sem incógnitas que é falsa $(0 = -24)$, então podemos classificá-lo como sendo um sistema ***impossível*** (**SI**). Assim, não há solução, ou seja, $S = \emptyset$.

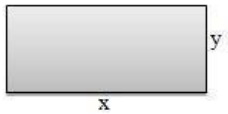
Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

10 POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

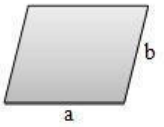
POLINÔMIOS

Um polinômio é definido pela união de monômios por meio de adição ou subtração. Um monômio é toda expressão algébrica determinada por apenas um número real, uma variável ou pelo produto de números e variáveis, todo monômio é considerado um polinômio. São exemplos de polinômios:

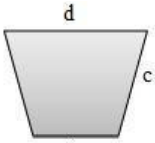
- **Perímetros de figuras planas**



2x + 2y



2a + 2b

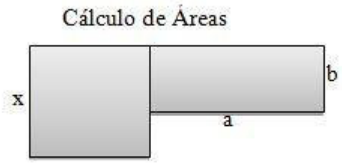


b + 2c + d

- **Cálculo de distâncias**

y - x

- **Cálculo de áreas**



$x^2 + ab$

Definição: Denomina-se expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x toda expressão escrita da seguinte forma:

$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$, no qual:

- a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_2, a_1, a_0 são números complexos denominados ***coeficientes*** e a_0 recebe o nome de termo constante;

- n é um número inteiro positivo ou nulo;
- O maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o que determina o **grau** da expressão polinomial. Assim, se $a_n \neq 0$, então $\mathrm{Gr}(\mathrm{p}) = n$.
- A **raiz** de um polinômio é o valor que a variável x assume de modo que o resultado seja igual a zero. Em linguagem matemática, seria assim: α é a raiz de $\mathrm{p}(x) \Leftrightarrow \mathrm{p}(\alpha) = 0$.

Por exemplo, 1 é **raiz** do polinômio $\mathrm{p}(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, pois:

$$\mathrm{p}(1) = 1^3 + 2 \cdot (1)^2 - 2 \cdot (1) - 1 \Rightarrow \mathrm{p}(1) = 1 + 2 - 2 - 1 \Rightarrow \mathrm{p}(1) = 0$$

Outro exemplo: Sabendo que 12 é raiz de $\mathrm{p}(x) = x^2 - k \cdot x + 6$, determine o valor de k.

Resolução: Como 12 é raiz do referido polinômio, então $\mathrm{p}(12) = 0$. Assim:

$$\mathrm{p}(12) = (12)^2 - k \cdot 12 + 6 = 0 \Rightarrow 144 - 12k + 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{25}{2}$$

Resposta: O valor de k é $\frac{25}{2}$.

POLINÔMIO NULO

É todo polinômio cujos ***coeficientes*** são todos nulos, ou seja, $\mathrm{p}(x) = 0$. Neste caso, não se define o ***grau*** para o polinômio.

VALOR NUMÉRICO

O valor numérico de um polinômio é obtido quando substituímos x por um número real a. Neste caso, chamamos de $\mathrm{p}(a)$ o valor numérico de $\mathrm{p}(x)$. Por exemplo:

Seja o polinômio: $\mathrm{p}(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. O valor numérico de $\mathrm{p}(1)$ será:

$$\mathrm{p}(1) = (1)^3 - 6 \cdot (1)^2 + 11 \cdot (1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 12 - 12 = 0$$

Logo, $p(1)=0$ é o **valor numérico** de $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$. Conforme já estudado, 1 é **raiz** deste polinômio.

Outro exemplo: Fornecido o polinômio $p(x)=2x^3-6x^2+mx+n$, se $p(2)=0$ e $p(-1)=-6$, determine os valores de m e n.

Resolução: Como são dados os valores numéricos de $P(2)=0$ e $P(-1)=-6$, então é possível obter as seguintes equações:

1.ª equação:

$$P(2)=2\cdot(2)^3-6\cdot(2)^2+m\cdot(2)+n=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16-24+2m+n=0\Rightarrow 2m+n=8$$

2.ª equação:

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+n=-6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2-6-m+n=-6\Rightarrow -m+n=2$$

Subtraindo a 2.ª equação da 1.ª, temos:

$$\begin{array}{r} 2m+n=8 \\ -\quad -m+n=2 \\ \hline 3m=6\Rightarrow m=2 \end{array}$$

Substituindo o valor de m na 1.ª equação, obtemos o valor de n:

$$2m+n=8\Rightarrow 2\cdot(2)+n=8\Rightarrow 4+n=8\Rightarrow n=4$$

Resposta: Os valores de m e n são, respectivamente, 2 e 4.

OPERAÇÃO COM POLINÔMIOS

As operações de adição, subtração e multiplicação envolvendo polinômios já devem ter sido abordadas em momento anterior, principalmente no estudo de expressões algébricas. A seguir, tais operações serão exemplificadas.

Consideremos os seguintes polinômios: $p(x)=3x^3+x^2-5x+2$, $q(x)=2x^2+5x-5$ e $r(x)=-x^3-3x^2+2x-1$. Observem as seguintes operações:

a) Adição: a.1) $\mathrm{p}(x)+\mathrm{q}(x)=\overbrace{3x^3+x^2-5x+2}^{\mathrm{p}(x)}+\overbrace{2x^2+5x-5}^{\mathrm{q}(x)}=$

$$=3x^3+(1+2)x^2+(-5+5)x+2-5=3x^3+3x^2-3$$

a.2) $\mathrm{p}(x)+\mathrm{q}(x)+\mathrm{r}(x)=\overbrace{3x^3+x^2-5x+2}^{\mathrm{p}(x)}+\overbrace{2x^2+5x-5}^{\mathrm{q}(x)}+\overbrace{(-x^3)-3x^2+2x-1}^{\mathrm{r}(x)}=$

$$=(3-1)x^3+(1+2-3)x^2+(-5+5+2)x+2-5-1=2x^3+2x-4$$

b) Subtração: b.1) $\mathrm{p}(x)-\mathrm{q}(x)=\overbrace{3x^3+x^2-5x+2}^{\mathrm{p}(x)}-\left(\overbrace{2x^2+5x-5}^{\mathrm{q}(x)}\right)=$

$$=3x^3+(1-2)x^2+(-5-5)x+2+5=3x^3-x^2-10x+7$$

b.2) $\mathrm{q}(x)-\mathrm{p}(x)=\overbrace{2x^2+5x-5}^{\mathrm{q}(x)}-\left(\overbrace{3x^3+x^2-5x+2}^{\mathrm{p}(x)}\right)=$

$$=-3x^3+(2-1)x^2+(5+5)x-5-2=-3x^3+x^2+10x-7$$

c) Multiplicação entre polinômios (aplica-se a propriedade distributiva):

$$\mathrm{q}(x)\cdot\mathrm{r}(x)=\left(\overbrace{2x^2+5x-5}^{\mathrm{q}(x)}\right)\cdot\left(\overbrace{-x^3-3x^2+2x-1}^{\mathrm{r}(x)}\right)=$$

c.1) $=-2x^5-6x^4+4x^3-2x^2-5x^4-15x^3+10x^2-5x+5x^3+15x^2-10x+5=$

$$=-2x^5-11x^4-6x^3+23x^2-15x+5$$

d) Multiplicação de um número real por um polinômio (também se aplica a propriedade distributiva):

d.1) $5\cdot\mathrm{p}(x)=5\cdot\left(\overbrace{3x^3+x^2-5x+2}^{\mathrm{p}(x)}\right)=15x^3+5x^2-25x+10$

d.2) $\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\mathrm{r}(x)=\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\overbrace{-x^3-3x^2+2x-1}^{\mathrm{r}(x)}\right)=\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}-1+\frac{1}{2}$

Em relação à divisão, a seguir serão apresentados alguns métodos de resolução.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Consideremos os polinômios $p(x)$ e $s(x)$, com $s(x) \neq 0$. Dividir $p(x)$ por $s(x)$ significa que existam dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ de modo a satisfazer as seguintes condições:

1.ª) $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$

2.ª) O grau de $r(x)$ não pode ser igual nem maior que o grau de $s(x)$ ou, então, $r(x) = 0$.

Deste modo, pode-se dizer que:

- $p(x)$ é o dividendo;
- $s(x)$ é o divisor;
- $q(x)$ é o quociente e
- $r(x)$ é o resto da divisão.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & s(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

Um dos métodos para efetuar a divisão entre polinômios é apresentado a seguir:

DIVISÃO ENTRE POLINÔMIOS: MÉTODO DA CHAVE

Este método é semelhante ao algoritmo euclidiano da divisão envolvendo números inteiros. No exemplo seguinte são esboçadas as etapas que compõem tal método.

Consideremos a divisão de $p(x) = 6x^3 - 13x^2 + x + 3$ por $s(x) = 2x^2 - 3x - 1$.

1.ª etapa) Divide-se $6x^3$ por $2x^2$, obtendo-se $\frac{6x^3}{2x^2} = 3x$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 13x^2 + x + 3 & 2x^2 - 3x - 1 \\ \hline & 3x \end{array}$$

2.ª etapa) Multiplica-se $3x$ pelo divisor $s(x) = 2x^2 - 3x - 1$: $3x \cdot (2x^2 - 3x - 1) = 6x^3 - 9x^2 - 3x$. Subtrai-se este resultado de $p(x) = 6x^3 - 13x^2 + x + 3$:

$$\begin{array}{rl|l} 6x^3-13x^2+x+3 & & 2x^2-3x-1 \\ \cline{3-3} -6x^3+9x^2+3x & & 3x \\ \cline{1-1} -4x^2+4x+3 & & \end{array}$$

Como o polinômio obtido $\left(-4x^2+4x+3\right)$ possui grau igual ao do divisor $\mathrm{s}(x)$, prossegue-se a divisão. Se o polinômio obtido tivesse grau menor que o do divisor, a divisão terminaria aqui.

3.ª etapa) Divide-se $-4x^2$ por $2x^2$, obtendo-se $\dfrac{-4x^2}{2x^2}=-2$.

$$\begin{array}{rl|l} 6x^3-13x^2+x+3 & & 2x^2-3x-1 \\ \cline{3-3} -6x^3+9x^2+3x & & 3x-2 \\ \cline{1-1} -4x^2+4x+3 & & \end{array}$$

4ª etapa) Multiplica-se -2 pelo divisor $\mathrm{s}(x)=2x^2-3x-1$: $-2\cdot\left(2x^2-3x-1\right)=-4x^2+6x+2$. Subtrai-se este resultado de $-4x^2+4x+3$:

$$\begin{array}{rl|l} 6x^3-13x^2+x+3 & & 2x^2-3x-1 \\ \cline{3-3} -6x^3+9x^2+3x & & 3x-2 \\ \cline{1-1} -4x^2+4x+3 & & \\ 4x^2-6x-2 & & \\ \cline{1-1} -2x+1 & & \end{array}$$

Como o polinômio obtido $\left(-2x+1\right)$ possui grau menor em relação ao divisor $\mathrm{s}(x)$, então, a divisão se encerra. Assim, $\mathrm{p}(x)=6x^3-13x^2+x+3$ dividido por $\mathrm{s}(x)=2x^2-3x-1$ possui como quociente $\mathrm{q}(x)=3x-2$ e resto $\mathrm{r}(x)=-2x+1$.

Para verificar se a divisão está correta, basta observar se a igualdade $\mathrm{p}(x)=\mathrm{s}(x)\cdot\mathrm{q}(x)+\mathrm{r}(x)$ é satisfeita, conforme denotado abaixo:

$$\mathrm{p}(x)=\mathrm{s}(x)\cdot\mathrm{q}(x)+\mathrm{r}(x)$$
$$6x^3-13x^2+x+3=\left(2x^2-3x-1\right)\cdot\left(3x-2\right)+\left(-2x+1\right)$$
$$6x^3-13x^2+x+3=6x^3-13x^2+3x+2-2x+1$$
$$6x^3-13x^2+x+3=6x^3-13x^2+x+3$$

Utilizando tal método, a seguir, será esboçada a divisão de $\mathrm{p}(x)=4x^2-2x+3$ por $\mathrm{s}(x)=2x-1$:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2-2x+3 & 2x-1 \\ \underline{-4x^2+2x} & 2x \\ 3 & \end{array}$$

Assim, a divisão de $\mathrm{p}(x)=4x^2-2x+3$ por $\mathrm{s}(x)=2x-1$ apresenta como quociente $\mathrm{q}(x)=2x$ e resto $\mathrm{r}(x)=3$. De modo análogo ao realizado anteriormente, verifica-se se a divisão realizada está correta.

Observação: Note que o grau do quociente $\mathrm{Gr}(\mathrm{q})$ é a diferença entre os graus do dividendo $\mathrm{Gr}(\mathrm{p})$ e do divisor $\mathrm{Gr}(\mathrm{s})$, ou seja, $\mathrm{Gr}(\mathrm{q})=\mathrm{Gr}(\mathrm{p})-\mathrm{Gr}(\mathrm{s})$.

DIVISÃO ENTRE POLINÔMIOS: MÉTODO DE BRIOT-RUFFINI

Este método permite a divisão de um polinômio qualquer $\mathrm{p}(x)$ por polinômios do tipo $x-a$. A seguir apresenta-se um tipo de esquema utilizado neste método (ou algoritmo):

termo constante do divisor, com sinal trocado	coeficiente de x do dividendo $\mathrm{p}(x)$	termo constante do dividendo $\mathrm{p}(x)$
	coeficientes do quociente	resto

Nas etapas seguintes, por meio deste método, observe a divisão do polinômio $\mathrm{p}(x)=2x^3-8x^2+2x+12$ por $\mathrm{s}(x)=x-3$.

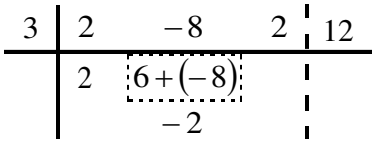
1.ª etapa) Na primeira linha do esquema preenchem-se os respectivos valores:

3	2	−8	2	12

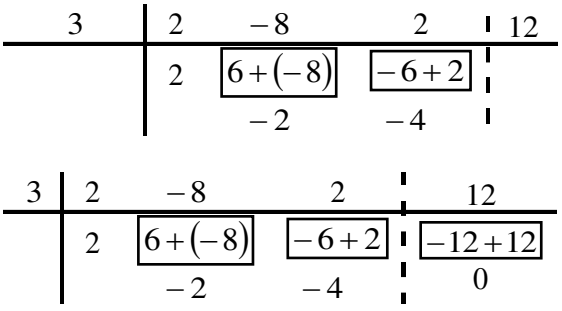
2.ª etapa) Na segunda linha, repete-se (ou abaixa-se) o primeiro coeficiente do dividendo:

3	2	−8	2	12
	2			

3.ª etapa) Multiplica-se o termo repetido (2) pelo termo constante do divisor (3); o produto (6) é adicionado ao próximo coeficiente do dividendo (-8). O resultado (-2) é colocado abaixo do coeficiente (-8):



4.ª etapa) Repete-se este processo até a obtenção do resto:



5ª etapa) Representam-se o polinômio quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$. Note que os números (2), (-2) e (-4) serão os coeficientes do quociente $q(x)$. Já o resto será nulo:

$$q(x)=2x^2-2x-4 \qquad\qquad r(x)=0$$

Para verificar se a divisão está correta, basta observar se a igualdade $p(x)=s(x)\cdot q(x)+r(x)$ é satisfeita:

$$p(x)=s(x)\cdot q(x)+r(x)$$
$$2x^3-8x^2+2x+12=(x-3)\cdot(2x^2-2x-4)+0$$
$$2x^3-8x^2+2x+12=2x^3-2x^2-4x-6x^2+6x+12$$
$$2x^3-8x^2+2x+12=2x^3-8x^2+2x+12$$

Observação: Perceba que, na divisão de um polinômio qualquer $p(x)$ por polinômios do tipo $x-a$, o resto será sempre uma constante, pois $x-a$ (o divisor) é um polinômio do 1.º grau.

Utilizando este método, observe a divisão do polinômio $\mathrm{p}(x)=3x^3+5x-6$ por $\mathrm{s}(x)=3x-1$. Como o divisor não é um polinômio do tipo $x-a$, então, será necessário, inicialmente, dividir todos os coeficientes de $\mathrm{p}(x)$ e $\mathrm{s}(x)$ por (3) de modo que o coeficiente de x do divisor $\mathrm{s}(x)$ seja 1. Após, realiza-se o método de Briot-Ruffini conforme denotado anteriormente:

$\frac{\mathrm{p}(x)}{3}=\frac{3}{3}x^3+\frac{5}{3}x-\frac{6}{3}=x^3+\frac{5}{3}x-2$, no qual os coeficientes de x do dividendo são 1, 0, $\frac{5}{3}$. O 0 indica o coeficiente do termo x^2. Já o termo constante é -2.

$\frac{\mathrm{s}(x)}{3}=\frac{3}{3}x-\frac{1}{3}=x-\frac{1}{3}$, cujo termo constante do divisor com sinal trocado é $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{5}{3}$	-2
	1	$\frac{1}{3}+0$	$\frac{1}{9}+\frac{5}{3}$	$\frac{16}{27}+(-2)$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{9}$	$-\frac{38}{27}$

Assim, $\mathrm{q}(x)=x^2+\frac{1}{3}x+\frac{16}{9}$ e $\frac{\mathrm{r}(x)}{3}=-\frac{38}{27}\Rightarrow \mathrm{r}(x)=-\frac{38}{9}$. Note que, para obter $\mathrm{r}(x)$, multiplica-se por (3) o valor encontrado. Verificando se a divisão está correta:

$$\mathrm{p}(x)=\mathrm{s}(x)\cdot\mathrm{q}(x)+\mathrm{r}(x)$$

$$3x^3+5x-6=(3x-1)\cdot\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{16}{9}\right)+\left(-\frac{38}{9}\right)$$

$$3x^3+5x-6=3x^3+x^2+\frac{16}{3}x-x^2-\frac{1}{3}x-\frac{16}{9}-\frac{38}{9}$$

$$3x^3+5x-6=3x^3+\frac{15}{3}x-\frac{54}{9}$$

$$3x^3+5x-6=3x^3+5x-6$$

TEOREMA DO RESTO OU D'ALEMBERT

Segundo o referido teorema, o resto da divisão de um polinômio $\mathrm{p}(x)$ por $x-a$ é $\mathrm{p}(a)$. Por exemplo, para calcular o resto da divisão de $\mathrm{p}(x)=x^2+3x-10$ por $x-3$, basta obter o valor numérico de $\mathrm{p}(3)$. Veja:

$$\mathrm{p}(3)=(3)^2+3\cdot 3-10 \Rightarrow \mathrm{p}(3)=9+9-10 \Rightarrow \mathrm{p}(3)=8$$

Portanto, o resto dessa divisão será 8, ou $r(x)=8$. Observe que, utilizando tal teorema, não é necessário realizar a divisão para obter o resto.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Define-se **equação polinomial** (ou **equação algébrica**) toda equação que pode ser representada da seguinte forma:

$\mathrm{p}(x)=0 \Leftrightarrow a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x^1+a_0=0$, no qual:

- $a_n\neq 0$;
- a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_2, a_1, a_0 são números complexos denominados ***coeficientes*** e a_0 recebe o nome de termo constante;
- n é um número inteiro positivo ou nulo e determina o grau da equação.
- A **raiz** ou **zero** da equação polinomial é todo valor α de x que satisfaça a igualdade $a_n\cdot\alpha^n+a_{n-1}\cdot\alpha^{n-1}+a_{n-2}\cdot\alpha^{n-2}+\ldots+a_2\cdot\alpha^2+a_1\cdot\alpha^1+a_0=0$.

Por exemplo, a equação polinomial $x^2+5x+6=0$ possui como raízes os valores -2 e -3, pois:

$$(-2)^2+5\cdot(-2)+6=4-10+6=0 \quad\vdots\quad (-3)^2+5\cdot(-3)+6=9-15+6=0$$

Observação: O conjunto das raízes da equação recebe o nome de ***conjunto solução***. Por exemplo, o conjunto solução de $x^2+5x+6=0$ é denotado por $S=\{-2;\ -3\}$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Segundo este teorema, toda equação algébrica $\mathrm{p}(x)=0$, de grau $n\geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

FORMA FATORADA

Toda equação polinomial (ou equação algébrica), de grau n $(n \geq 1)$, pode ser decomposta em um produto de n fatores do primeiro grau. Assim, a forma fatorada da equação $p(x)=0$ é $a_n \cdot (x-\alpha_n)\cdot(x-\alpha_{n-1})\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_3)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_1)=0$, em que α_n, α_{n-1}, $\ldots$, α_3, α_2, α_1, são as raízes da equação.

Considerando o último exemplo denotado, temos que a forma fatorada de $\overset{a_2}{1}\cdot x^2+5x+6=0$ é $\overset{a_2}{1}\cdot \underbrace{\left[x-\overbrace{(-2)}^{\alpha_1}\right]\cdot\left[x-\overbrace{(-3)}^{\alpha_2}\right]}_{\text{2 fatores, pois n=2}}=0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x+3)=0$.

Note que $\alpha_1=-2$ e $\alpha_2=-3$ são as raízes desta equação do segundo grau.

MULTIPLICIDADE DA RAIZ

Ao decompor um polinômio $p(x)$, de grau n $(n \geq 1)$, em um produto de n fatores do 1.º grau, pode-se encontrar dois ou mais fatores idênticos. Por exemplo, ao decompor $p(x)=x^2+10x+25$, obtém dois fatores idênticos: $p(x)=x^2+10x+25=(x+5)^2=(x+5)\cdot(x+5)$. Neste caso, pode-se afirmar que -5 é ***raiz dupla*** ou de ***multiplicidade 2***.

Assim, o número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a multiplicidade da raiz. Generalizando, "o número r é ***raiz de multiplicidade*** m de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)=(x-r)^m.q(x)$, $q(x)\neq 0$". Observe, a seguir, dois exemplos:

a) No polinômio $p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2=(x-1)\cdot(x-1)$, há dois fatores idênticos $(x-1)$. Portanto, 1 é ***raiz dupla*** ou de ***multiplicidade 2*** deste polinômio.

b) No polinômio

$$p(x)=x^4-4x^3-2x^2-12x+9=(x+3)^2\cdot(x-1)^2=(x+3)\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-1)$$

há dois fatores idênticos $(x+3)$ e mais dois fatores idênticos $(x-1)$. Assim, -3 é ***raiz dupla*** ou de ***multiplicidade 2*** e 1 é ***raiz dupla*** ou de ***multiplicidade 2*** deste polinômio.

RELAÇÕES DE GIRARD

Representam expressões matemáticas que relacionam as raízes e os coeficientes de uma equação. O quadro seguinte apresenta, resumidamente, tais relações:

Grau da Equação	Relações
Equação do 2.º grau: $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$. x_1 e x_2 são as raízes da equação.	• $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ • $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$
Equação do 3.º grau: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com $a\neq 0$. x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação.	• $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$ • $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{d}{a}$ • $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=\dfrac{c}{a}$
Equação de grau n: $a_n\cdot x^n+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x^1+a_0=0$, com $a_n\neq 0$. x_1, x_2, …, x_n são as n raízes da equação.	• $x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ • $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n}$ • $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\ldots+x_{n-1}\cdot x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

Por exemplo, supondo que a equação $3x^3+2x^2-x-3=0$ admita as raízes x_1, x_2 e x_3, então, as relações de Girard serão:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{2}{3} \quad\vdots\quad x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{(-3)}{3}=1 \quad\vdots\quad x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-\frac{1}{3}$$

A partir dos temas abordados neste capítulo, observe a resolução de alguns problemas.

Exemplo 1: A soma das soluções da equação $x^3+4x^2-x-4=0$ é:

a) 4 b) 2 c) -1 d) -4 e) 1

Resolução: Utilizando as relações de Girard para uma equação do 3.º grau, temos que a soma das raízes é dada por:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{4}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -4$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **d**.

Exemplo 2) (UNESP – 2013): A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite 1 como raiz. Suas duas outras raízes são:

a) $(1+\sqrt{3}i)$ e $(1-\sqrt{3}i)$
b) $(1+i)$ e $(1-i)$
c) $(2+i)$ e $(2-i)$
d) $(-1+i)$ e $(-1-i)$
e) $(-1+\sqrt{3}i)$ e $(-1-\sqrt{3}i)$

Resolução: Sendo o número 1 uma das raízes de $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, então, conforme o teorema do resto (ou d'Alembert), $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ é divisível por $(x-1)$. Utilizando Briot-Ruffini é possível determinar a expressão que, multiplicada por $(x-1)$, resulte em $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$:

1	1	-3	4	-2
	1	$1+(-3)$	$-2+4$	$2-2$
		-2	2	0

Assim, $p(x) = \overbrace{(x-1)}^{s(x)} \cdot \overbrace{(x^2 - 2x + 2)}^{q(x)} + \overbrace{0}^{r(x)}$. Para determinar as outras duas raízes da equação, basta resolver $x^2 - 2x + 2 = 0$ por meio da fórmula de Bháskara:

Primeiro, calcula-se o discriminante:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

Em seguida, calculam-se as raízes da equação:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4i^2}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i\\ x_2=\dfrac{2-2i}{2}=1-i\end{cases}\Rightarrow 1+i \text{ e } 1-i \text{ são as raízes.}$$

Logo, as três raízes da equação $x^3-3x^2+4x-2=0$ são 1, $1+i$ e $1-i$, ou seja, $S=\{1;\ 1+i;\ 1-i\}$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

Exemplo 3: Qual o valor de m, de modo que -1 seja raiz da equação $x^3+(m+2)x^2+(1-m)x-2=0$?

Resolução: Se -1 é raiz do polinômio $p(x)=x^3+(m+2)x^2+(1-m)x-2$, então, $p(-1)=0$. Calculando o valor numérico de $p(-1)=0$ temos:

$$p(-1)=(-1)^3+(m+2)\cdot(-1)^2+[(1-m)\cdot(-1)]-2=0$$
$$-1+m+2-1+m-2=0\Rightarrow 2m-2=0\Rightarrow m=1$$

Resposta: O valor de m é igual a 1.

Exemplo 4: Se 2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$, calcule seu conjunto solução.

Resolução: Conforme o enunciado, o número 2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$. Por se tratar de uma equação do 4.º grau, então, a mesma possui 4 raízes. Como 3 destas raízes são iguais, ou seja, $x_1=x_2=x_3=2$, utilizando qualquer uma das relações de Girard é possível determinar o valor da 4.ª raiz. Consideremos a relação da soma de raízes:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Sabendo que $x_1=x_2=x_3=2$, $a_{n-1}=-9$ e $a_n=1$, temos:

$$2+2+2+x_4=-\frac{-9}{1}\Rightarrow 6+x_4=9\Rightarrow x_4=9-6=3$$

Resposta: O conjunto solução da equação é $S = \{2\,(\text{tripla});\ 3\}$.

Exemplo 5 (VUNESP – 2000): Ao dividirmos um polinômio $\mathrm{p}(x)$ por $(x-c)$, obtemos quociente $\mathrm{q}(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ e resto $\mathrm{p}(c) = 3$. Sabendo-se que $\mathrm{p}(1) = 2$, determine

a) o valor de c;

b) o polinômio $\mathrm{p}(x)$.

Resolução: a) Conforme já abordado, temos que:

$\mathrm{p}(x) = \mathrm{q}(x) \cdot \mathrm{s}(x) + \mathrm{r}(x)$, sendo $\mathrm{s}(x)$ o divisor e $\mathrm{r}(x)$ o resto da divisão.

A partir do enunciado, sabe-se que $\mathrm{s}(x) = x - c$ e $\mathrm{r}(x) = 3$. Logo:

$$\mathrm{p}(x) = \overbrace{\left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right)}^{\mathrm{q}(x)} \cdot \overbrace{(x-c)}^{\mathrm{s}(x)} + \overbrace{3}^{\mathrm{r}(x)}$$

Como $\mathrm{p}(1) = 2$, então:

$$\mathrm{p}(1) = \left(3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 1\right) \cdot (1 - c) + 3$$
$$2 = 1 \cdot (1 - c) + 3 \Rightarrow 2 - 3 = 1 - c \Rightarrow -1 - 1 = -c \Rightarrow c = 2$$

b) Sabendo que $c = 2$, é possível determinar $\mathrm{p}(x)$. Observe:

$$\mathrm{p}(x) = \overbrace{\left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right)}^{\mathrm{q}(x)} \cdot \overbrace{(x-2)}^{\mathrm{s}(x)} + \overbrace{3}^{\mathrm{r}(x)}$$
$$\mathrm{p}(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x^3 + 4x^2 + x^2 - 2x - x + 2 + 3$$
$$\mathrm{p}(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 3x + 5$$

Resposta: a) $c = 2$

b) $\mathrm{p}(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 3x + 5$

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

11 NÚMEROS COMPLEXOS

Para iniciarmos o estudo deste capítulo, vejamos a equação $x^2 + 3x + 5 = 0$ no conjunto dos números reais. Qual o valor que você encontrou para o discriminante? Essa equação admite raízes nesse conjunto?

Se ao resolvermos a equação, surge uma expressão envolvendo uma raiz quadrada de um número real negativo, a solução é impossível dentro desse conjunto, os reais. No século XVI matemáticos italianos, como Tartaglia[8] e Cardano[9], perceberam em seus estudos de equações do terceiro grau, que o conjunto dos reais não continha todas as soluções e então surgiu a ideia de ampliar o conjunto, acrescentando aos números reais um número imaginário que ao quadrado fosse igual a -1, ou seja, $i^2 = -1$.

Desta forma o **conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$,** pode ser expresso da seguinte forma: $\mathbb{C} = \{a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $i^2 = -1\}$.

Essa maneira de expressar um número complexo é chamada de **Forma Algébrica** dos números complexos.

Considere $z = a + bi$ um número complexo, vamos destacar alguns elementos importantes da **forma algébrica**, lembrando que $i^2 = -1$:

- Parte real de z: $\mathcal{R}(z) = a \in \mathbb{R}$

- Parte imaginária de z: $\mathcal{I}m(z) = b \in \mathbb{R}$

- Unidade imaginária: i

Observação: Se $b = 0 \Rightarrow z = a$ é número real.

Se $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow z = bi$ é número imaginário puro.

Assim, pode-se afirmar que todo número real é um número complexo, mas nem todo número complexo é real. O conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos.

[8] Para saber mais visite: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tartaglia
[9] Visite: https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano

POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

Pode-se observar que:

$$\left.\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow i^n = i^r,$$

sendo r o resto da divisão de n por 4.

Observação: $i^0 = i^4 = 1$, pois 0 e 4 possuem o mesmo resto na divisão por 4.

Exemplo: Para calcular o valor de $z = i^{2000} + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003}$ precisamos determinar o resto das divisões dos expoentes por 4, e então escrever as equivalências. Assim temos:

$$z = i^{2000} + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$$

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, dois números complexos.

1. **Adição:** $z + w = (a + c) + (b + d)i$

   Exemplo: Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 1 - 2i$.

   Então: $z + w = (2 + 3i) + (1 - 2i) = (2 + 1) + (3 - 2)i = 3 + i$.

   Propriedades da Adição

A1. Associativa: Dados $z, w, p \in \mathbb{C}$ temos que $(z + w) + p = z + (w + p)$.

A2. Comutativa: Dados $z, w \in \mathbb{C}$ temos que $(z + w) = (w + z)$.

A3. Elemento Neutro: Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ existe $0 = 0 + 0i$ um número complexo tal que, $z + 0 = z = 0 + z$.

A4. Elemento Oposto: Dado $z \in \mathbb{C}$ existe $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$.

Observação: A propriedade do Elemento Oposto é conhecida na aritmética como:

Operação de Subtração: $z - w = (a - c) + (b - d)i$

Exemplo: Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 1 - 2i$.

Então: $z - w = (2 + 3i) - (1 - 2i) = (2 - 1) + (3 - (-2))i = 1 + 5i$.

2. **Multiplicação:** $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo: Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 1 - 2i$.

Então: $zw = (2 + 3i)(1 - 2i) = (2.1 - 3(-2)) + (2(-2) + 3.1)i = 8 - i$.

Propriedades da Multiplicação

M1. Associativa: Dados $z, w, p \in \mathbb{C}$ temos que $(zw)p = z(wp)$.

M2. Comutativa: Dados $z, w \in \mathbb{C}$ temos que $(zw) = (wz)$.

M3. Elemento Neutro: Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ existe $1 = 1 + 0i$ um número complexo tal que, $z.1 = z = 1.z$.

M4. Elemento Inverso: Dado $z \in \mathbb{C}$ existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ onde $zz^{-1} = 1$.

Observação: A propriedade do Elemento Inverso é conhecida na aritmética como:

Operação de Divisão: $zw^{-1} = \frac{z}{w}$

3. **Conjugação**: Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ existe seu conjugado, que é o número complexo $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$.

Propriedades da conjugação

C1. A soma do um complexo z com seu conjugado $\bar{z}$ é um número real dado por:

$$z + \bar{z} = 2\mathcal{R}(z) = 2a.$$

C2. A multiplicação do um complexo z com seu conjugado $\bar{z}$ é um número real dado por:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

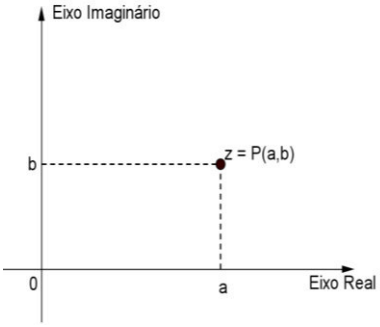
Observação: Quando trabalhamos com a divisão entre números complexos é preciso tornar o denominador em um número real, assim devemos sempre multiplicar o numerador e denominador da fração, pelo conjugado do denominador.

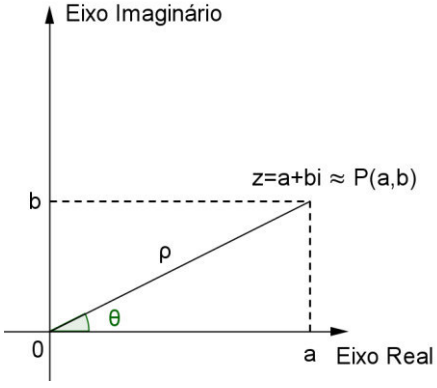
Exemplo: Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 1 - 2i$.

$$\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i-6}{1+4} = \frac{-4+7i}{5}$$

Os números complexos podem ser identificados, através de uma transformação bijetora, com os pontos do plano cartesiano.

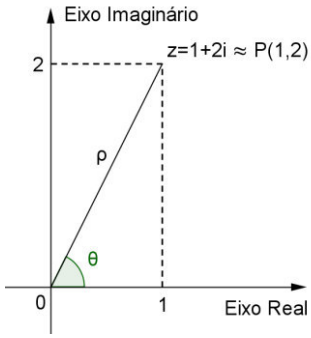
Desta forma, tem-se uma **Representação Gráfica** dos números complexos. O plano cartesiano complexo é também conhecido como Plano de Argand-Gauss. A transformação bijetora existente entre o conjunto dos números complexos e o plano cartesiano relaciona o número complexo $z = a + bi$ com o ponto P cuja abscissa é dada pela parte real do número complexo ($\mathcal{R}(z) = a$) e a ordenada, pela parte imaginária ($\mathcal{I}m(z) = b$).





Ao unir-se os pontos O e P obtemos a possibilidade de medir o comprimento desse segmento utilizando o Teorema de Pitágoras. A essa medida chamamos **Módulo** do número complexo, isto é, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Também pode-se medir o ângulo que tal segmento faz com o eixo real, medida que chamamos **Argumento** do número complexo ($\theta = arg(z)$ tal que $0° \leq \theta < 360°$).

Exemplo: Para representar o número complexo $w = 1 + 2i$ e calcular seu módulo devemos marcar 1 no eixo real (eixo-x) e 2 no eixo imaginário (eixo-y).



Módulo: $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

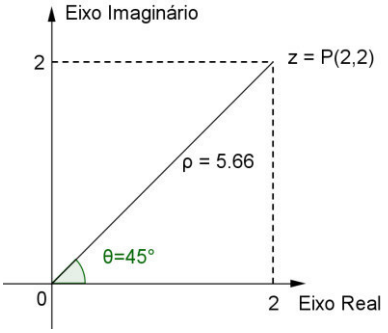
Usando relações da trigonometria temos as seguintes equações:

$$cos\,\theta = \frac{a}{|z|} \Leftrightarrow a = |z|cos\theta \quad \text{(a)}$$

$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} \Leftrightarrow b = |z|sen\theta \quad \text{(b)}$$

Exemplo:

Dado o número complexo $z = 2 + 2i$, podemos determinar o módulo e o argumento de z, da seguinte forma:



$$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 5{,}667$$

$$sen\theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|Z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Com esses valores de seno e cosseno, podemos afirmar que $\theta = 45^o$ ou $\frac{\pi}{4}$.

FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo na forma algébrica é dado por $z = a + bi$. Quando escrevemos esse número em função do seu módulo e do seu argumento, temos a

forma trigonométrica ou polar dos números complexos. Para isso vamos usar as equações (a) e (b) de tal forma que:

$$z = a + bi = |z|\cos(\theta) + |z|sen(\theta)i = |z|(cos\theta + isen\theta)$$

Lembrete: Da trigonometria sabemos que:

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$$

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$$

Considerando $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + isen\,\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(cos\beta + isen\,\beta)$, podemos operar com esses números complexos da seguinte forma:

a) $\overline{z_1} = \rho_1\big(\cos(-\alpha) + isen(-\alpha)\big) = \rho_1\big(\cos(\alpha) - isen(\alpha)\big)$, pois a função cosseno é par e a função seno é ímpar.

b) $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\alpha + \beta) + i\,sen(\alpha + \beta)]$ usando as equações (c) e (d).

c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_2)^2}\big(\cos(\alpha - \beta) + i\,sen(\alpha - \beta)\big)$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta)\big)$$

Exemplo: Dados $z_1 = 2(\cos 30^o + i\,sen30^o)$ e $z_2 = 3(\cos 60^o + i\,sen\,60^o)$, temos que:

$$z_1 z_2 = 6\big(\cos(30^o + 60^o) + i\,sen(30^o + 60^o)\big) = 6\big(\cos(90^o) + i\,sen(90^o)\big)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\Big(\cos(30^o - 60^o) + i\,sen(30^o - 60^o) = \frac{2}{3}cos\big(30^o - i\,sen(30^o)\big)\Big)$$

POTENCIAÇÃO: FÓRMULA DE DE MOIVRE[10]

Considerando $z = \rho(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos a conhecida Fórmula de De Moivre:

$$z^n = \rho^n[cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)], \text{ com } 0° \leq n\theta < 360°.$$

[10] Saiba mais em: https://en.wikipedia.org/wiki/De_Moivre%27s_formula

Exemplo: Dado o número complexo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right)$, podemos facilmente calcular o valor de z^4 utilizando a fórmula de De Moivre.

$$z^4 = 2^4\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\ sen\ \frac{4\pi}{6}\right) = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ sen\ \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exemplo: Dado o número complexo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right)$, podemos facilmente calcular o valor de z^{-2} utilizando a fórmula de De Moivre.

$$z^{-2} = 2^{-2}\left(\cos\frac{-2\pi}{6} + i\ sen\ \frac{-2\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\ sen -\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\ sen\frac{\pi}{3}\right)$$

RADICIAÇÃO OU RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO

O problema de extrair as raízes *n*-ésimas de um número complexo $z \in \mathbb{C}$, $(z)^{1/n} = z_0$, é equivalente a resolver a equação $(z_0)^n = z$, para $z_0 \in \mathbb{C}$, quando z e n são dados. Dadas a forma polar de $z \neq 0$, $z = \rho(\cos\theta + i\ sen\ \theta)$, e a forma polar de $z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + i\ sen\ \theta_0)$, onde ρ_0 e θ_0 são as incógnitas.

Reescrevendo a equação temos:

$$\rho_0{}^n(\cos n\theta_0 + i\ sen\ n\theta_0) = \rho(\cos\theta + i\ sen\theta).$$

Consequentemente, da igualdade temos que:

$$\rho_0{}^n = \rho \text{ e } n\theta_0 = (\theta \pm 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto temos *n* soluções distintas para a equação $(z_0)^n = z$, ou seja, existem *n* raízes do número complexo $z \in \mathbb{C}$, a saber,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\ \left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), \text{ para } 0 \leq k \leq n-1.$$

Quando $z = 0$, a equação $(z_0)^n = z$ tem uma única solução $z_0 = 0$.

Quando $z = 1$, temos as chamadas **raízes *n*-ésimas da unidade**, as quais podem ser descritas por:

$$z_k = \left(cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Observação: Em particular para $k = 1$ denominamos a raiz correspondente de **raiz primitiva**, a qual pode ser descrita por: $z_1 = \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\ sen\ \left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Tendo em vista a Fórmula de De Moivre, as raízes da unidade são dadas pelas potências da raiz primitiva, ou seja: $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$.

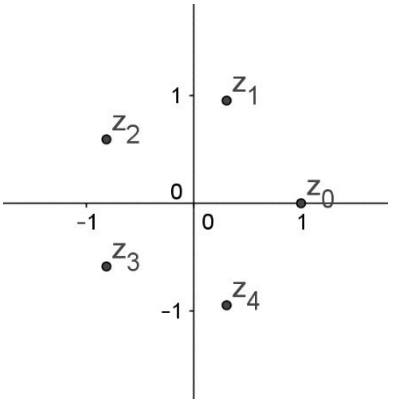
No plano complexo, as raízes *n*-ésimas da unidade são os vértices do polígono regular de *n* lados, inscrito no círculo de raio 1, com um vértice no ponto $z = 1$.

Exemplo: Determinar as raízes quintas da unidade.

Resolução: Isto significa determinar

$$z_1 = \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\ sen\ \left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

e depois $\omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$, lembrando que $z_0 = 1$ sempre é uma das raízes da unidade. Pela Fórmula de De Moivre, temos as outras raízes da unidade:



$$z_2 = \omega^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\ sen\ \left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$z_3 = \omega^3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\ sen\ \left(\frac{6\pi}{5}\right) \text{ e } z_4 = \omega^4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\ sen\ \left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

Observação: A raiz primitiva da unidade pode também ser usada para determinação das raízes *n*-ésimas de qualquer de $z \in \mathbb{C}$. Consideremos $z_1 \in \mathbb{C}$ uma raiz qualquer das *n*-ésima de $z \in \mathbb{C}$, então $z_1\omega,\ z_1\omega^2,\ z_1\omega^3, \dots,\ z_1\omega^{n-1}$, são as demais *n*-ésimas raízes desse número complexo.

Generalizando temos então:

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{\rho^m}\ \left(\cos\left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Exemplo: Determinar os números complexos z tais que $z^{2/3} = 1 + i$.

Resolução: Temos que $1 + i = \sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Assim: $z^{2/3} = 1 + i = \left(\sqrt{2}\right)^{2/3} \left(cos\left(\frac{3\pi+2k\pi}{8}\right) + i\, sen\left(\frac{3\pi+2k\pi}{8}\right)\right) =$

$= \sqrt[3]{2} \left(cos\left(\frac{3\pi+2k\pi}{8}\right) + i\, sen\left(\frac{3\pi+2k\pi}{8}\right)\right)$, para $k = 0,1,2$

Logo, temos três números complexos que satisfazem a equação, a saber:

- $z_0 = \sqrt[3]{2} \left(cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\, sen\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$;
- $z_1 = \sqrt[3]{2} \left(cos\left(\frac{3\pi+2\pi}{8}\right) + i\, sen\left(\frac{3\pi+2\pi}{8}\right)\right) = \sqrt[3]{2} \left(cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\, sen 5\pi 8;\right.$
- $z_2 = \sqrt[3]{2} \left(cos\left(\frac{3\pi+4\pi}{8}\right) + i\, sen\left(\frac{3\pi+4\pi}{8}\right)\right) = \sqrt[3]{2} \left(cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\, sen\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$.

A seguir observe a resolução de dois exemplos retirados do vestibular:

Exemplo 1 (UNESP – 2012): A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite 1 como raiz. Suas duas outras raízes são:

a) $(1 + i)$ e $(1 - i)$

b) $(2 + i)$ e $(2 - i)$

c) $(1 - 3i)$ e $(1 - i)$

d) $(-1 + i)$ e $(-1 - i)$

e) $(1 - 3i)$ e $(1 + 3i)$

Resolução: Como temos uma raiz, utilizamos o método ou dispositivo prático de Briot-Ruffini[11]:

	1	−3	4	−2
1		1	−2	2
	1	−2	2	0

. Assim temos que $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$.

Usando a Fórmula de Bháskara[12] temos $\Delta = -4$.

Portanto,

[11] Saiba mais: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/dispositivo-pratico-briotruffini.htm

[12] Veja a demonstração em: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/demonstracao-formula-bhaskara.htm

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$$
$$=$$
$$= (x-1)\left(x - (1+i)\left(x + (1+i)\right)\right)$$

Logo, as outras raízes são $(1+i)$ e $(1-i)$.

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

Exemplo 2 (UEFS – 2012): O dispositivo de Briot-Ruffini recebeu este nome em homenagem ao matemático francês Charles A. A. Briot (1817 – 1882) e ao matemático italiano Paolo Ruffini (1765 – 1822).

O esquema a seguir representa a divisão de um polinômio $P(x)$ por outro do tipo $D(x) = (x-1)(x-c)$ pelo método de Briot-Ruffini, com a, b, c e d constantes reais, d ≠ 0.

	1	a	−7	b
1	1	1	d	0
c	1	$-\frac{d}{2}$	0	

Nessas condições, pode-se afirmar que, sendo i a unidade imaginária dos números complexos, o valor de $(a + bi)(c - di)$ é

a) $36 - 12i$ b) $-12 - 36i$ c) $12 - 36i$
d) $12 + 36i$ e) $-36 + 12i$

Resolução: Inicialmente, utilizamos o dispositivo de Briot-Ruffini:

	1	a	−7	b
1	1	1	d	0
c	1	$-\frac{d}{2}$	0	

	1	0	−7	6
1	1	1	-6	0
	1	3	0	
	2			

Observando o esquema de Briot-Ruffini, temos que:

$1 + a = 1 \Rightarrow a = 0$; $1 - 7 = d \Rightarrow d = -6 \Rightarrow -\frac{d}{2} = 3$; $d + b = 0 \Rightarrow b = 6$ e $c + 1 = 3 \Rightarrow c = 2$.

Portanto: $a = 0, b = 6, c = 2$ e $d = -6$.

Assim: $(a + bi)(c - di) = 6i(2 + 6i) = 12i - 36$

Resposta: A alternativa correta é a letra **e.**

Questão 3 (UNESP – 2013): Sabe-se que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$. As outras raízes dessa equação, no Conjunto Numérico dos Complexos, são

a) $(-1 - i)$ e $(1 + i)$ b) $(1 - i)$ e $(1 - i)$ c) i e $(-i)$
d) 1 e (-1) e) $(1 + i)$ e $(1 - i)$

Resolução: Consideremos o conjunto $S = \{1, 1, 1, x_1, x_2\}$ como sendo o conjunto verdade para a equação do 5.º grau dada, $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, isto é, o conjunto de suas 5 soluções, então:

$$\begin{cases} 1 + 1 + 1 + x_1 + x_2 = 3 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ (x_1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = \pm i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = -i \\ x_2 = i \end{cases}$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **c.**

Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

12 GEOMETRIA ANALÍTICA

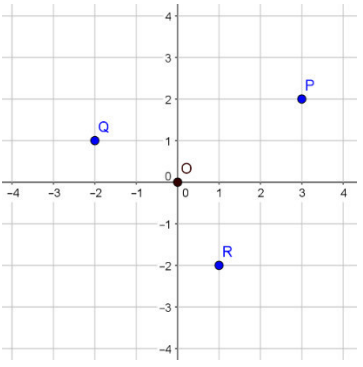
A Geometria Analítica pode ser também chamada de Geometria das Coordenadas ou de Geometria Cartesiana. Ela se dedica ao estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas utilizando os princípios da álgebra e da análise. Trata-se de um campo matemático onde são utilizados símbolos e métodos algébricos para o estudo de problemas geométricos. A importância desse conteúdo se encontra no fato de estabelecer uma correspondência entre curvas geométricas e equações algébricas.

Em geral, o sistema de coordenadas cartesianas é usado no trabalho com equações de retas, planos e curvas, geralmente em duas ou três dimensões, podendo também ser utilizada para um número maior de dimensões.

O surgimento desse campo da matemática se deu através dos estudos de dois franceses, Pierre de Fermat[13] (1601-1665) e René Descartes[14] (1596-1650), os quais, curiosamente, não foram matemáticos profissionais e não trabalhavam juntos. Esse é mais um dos muitos casos, na ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Na atualidade a tecnologia tem auxiliado muito no estudo da Geometria Analítica, através dos softwares de geometria dinâmicas, como por exemplo o GeoGebra[15],que surgiu em 2003 e tem sido distribuído gratuitamente pela internet, com versões para computadores, tablets e celulares.

Neste capítulo, faremos uma revisão dos principais conceitos da Geometria Analítica, iniciando pela apresentação do Sistema de Coordenadas Cartesianas.



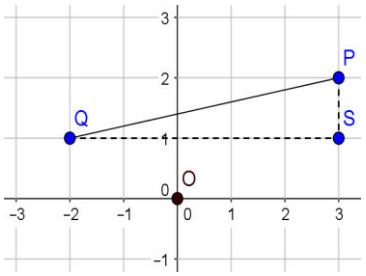
Na figura ao lado temos a representação, no plano cartesiano, de três pontos $P(3,2)$, $Q(-2,1)$ e $P(1,-2)$, além da interseção de duas retas, denominadas eixos cartesianos. Essa interseção dá origem ao sistema e por isso é denominada de **O**. Observamos que a primeira coordenada de cada um dos pontos é marcada no eixo horizontal (eixo-

[13] Saiba mais em: http://www.somatematica.com.br/biograf/fermat.php
[14] Ver: http://www.e-biografias.net/rene_descartes/
[15] Para saber mais: http://www.pucsp.br/geogebrasp/

x) e a segunda coordenada no eixo vertical (eixo-y). Dessa forma um ponto qualquer de coordenadas x e y é descrito pelo par ordenado (x, y).

Dados dois pontos quaisquer, P e Q, por exemplo, pode-se medir o segmento que os une, o que chamamos de **Distância ponto a ponto**. Notação: d(P,Q).

Observe que, na figura a seguir, podemos traçar dois segmentos: um paralelo ao eixo-x passando em Q e outro paralelo ao eixo-y passando em P. Se chamarmos a interseção desses segmentos de S, teremos um triângulo retângulo em S.



A distância entre os pares de pontos, P e S, e Q e S, são medidas com facilidade, pois basta considerar que a diferença entre as coordenadas diferentes, visto que os pontos possuem uma das coordenadas iguais. Neste caso temos que $x_S = x_P$ e $y_S = y_Q$.

Assim, d(Q, S) $= x_S - x_Q$ e d(P, S) $= y_P - y_Q$

Usando o Teorema de Pitágoras é possível calcular a medida do segmento PQ, ou seja, a distância entre esses dois pontos.

$$\text{d(P, Q)} = \sqrt{(x_S - x_Q)^2 + (y_P - y_S)^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Exemplo 1 (VUNESP – 2003): O triângulo PQR, no plano cartesiano, de vértices P(0, 0), Q(6, 0) e R(3, 5) é:

a) Equilátero b) Isósceles, mas não equilátero c) Escaleno
d) Retângulo e) Obtusângulo

Resolução: Utilizando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\text{d(P, Q)} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (0-0)^2} = 6$$

$$\text{d(P, R)} = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$d(Q, R) = \sqrt{\left(x_Q - x_R\right)^2 + \left(y_Q - y_R\right)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \\ = \sqrt{34}$$

Assim, o triângulo PQR possui dois lados com medidas iguais e um de medida diferente, o que nos diz que ele é do tipo Isósceles não equilátero.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b**.

Considerando, ainda, dois pontos pode-se desejar determinar um ponto entre eles que divida o segmento que os une em duas partes iguais, o que significa determinar um ponto no meio do segmento. Esse ponto é chamado de **Ponto Médio** de um segmento.

Sejam os pontos $P = (x_P, y_P)$, $Q = \left(x_Q, y_Q\right)$ e M o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$. Pela própria definição do ponto médio temos que d(PM) = d(MQ). Assim temos:

$$d(PM) = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} \text{ e}$$

$$d(MQ) = \sqrt{\left(x_M - x_Q\right)^2 + \left(y_M - y_Q\right)^2}$$

Ou seja, $(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 = \left(x_M - x_Q\right)^2 + \left(y_M - y_Q\right)^2$ cujo desenvolvimento resulta em:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}$$

Observação: Como o baricentro (B) de um triângulo é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo, temos que a distância entre tal ponto e os vértices do triângulo é sempre a mesma. A partir de manipulações algébricas, têm-se as coordenadas do baricentro que são dadas por:

$$x_B = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_B = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Exemplo: Determine os valores de x e y sabendo que $A(2, 4)$, $B(x, 2)$ e $C(2, y)$ são vértices de um triângulo cujo baricentro é o ponto $G(1, 2)$.

Resolução: Sabemos que as coordenadas do baricentro são:

$$x_B = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2+x+2}{3} = 1 \Leftrightarrow 4 + x = 3 \Leftrightarrow x = -1 \text{ e}$$

$$y_B = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{4+2+y}{3} = 2 \Leftrightarrow 6 + y = 6 \Leftrightarrow y = 0$$

Resposta: Assim, $x = -1$ e $y = 0$.

ÁREA DO TRIÂNGULO ABC

Na geometria plana estudamos algumas formas de se calcular a área de um triângulo. Na Geometria Analítica, onde cada um dos vértices é dado através de suas coordenadas, a questão do cálculo da área também é pertinente, e apesar de uma demonstração que utiliza conceitos mais avançados, os quais não trataremos aqui, a forma de calcular essa área é muito simples.

Esse tema é muito interessante, pois relaciona a geometria plana com a álgebra, através da teoria das matrizes. A forma de calcular a área do triângulo ABC, por meio do determinante e das coordenadas dos vértices, está dada na fórmula a seguir:

$$\text{A} = \frac{|\text{D}|}{2}, \text{ onde D é o determinante dado por D} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Observação: Observe que se o determinante **D** é nulo então obtemos uma área igual a zero, o que significa que não existe a possibilidade de se formar um triângulo com tais pontos, que é o mesmo de dizer que esses três pontos são colineares.

Exemplo: Determinar as coordenadas de $\text{C}(x, y)$ tal que pertença a reta $y = 1$ e junto com os pontos $\text{A}(2, 4)$ e $\text{B}(-1, 3)$ formem um triângulo de área 4.

Resolução: De fato, temos que:

$$\text{A} = \frac{|\text{D}|}{2} = 4, \text{ onde D é o determinante dado, D} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 8.$$

Assim, temos duas opções para o ponto procurado:

i) $6 + 4x - 1 - 3x + 4 - 2 = 8 \Leftrightarrow x = 1$ ou

ii) $6 + 4x - 1 - 3x + 4 - 2 = -8 \Leftrightarrow x = -15$.

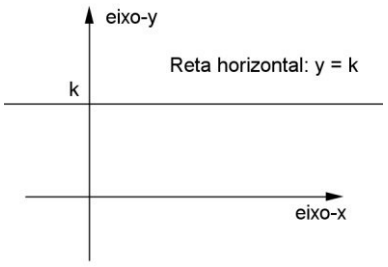
Resposta: Os pontos $\text{C}_1(1, 1)$ e $\text{C}_2(-15, 1)$ satisfazem o problema.

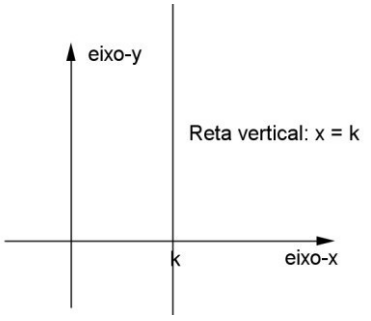
EQUAÇÕES DE RETAS

As retas são constituídas de pontos com características especiais e em comum, assim podemos destacar essas características ou relações usando as coordenadas desses pontos, à essa relação de equivalência que relaciona as coordenadas dos pontos de uma reta ou destacam uma característica especial desses pontos, chamamos **equação da reta** que passa nesses pontos.

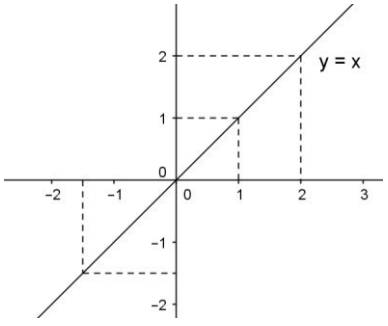
Destacamos algumas retas especiais:

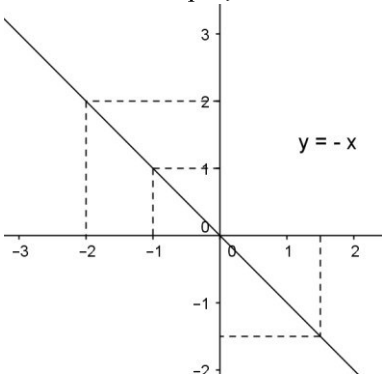
1. **Horizontal ou vertical**: os pontos dessas retas possuem uma das coordenadas sempre iguais, o que na equação é representado por uma constante.





2. **Bissetriz dos quadrantes ímpares ou dos pares:** nessas retas as coordenadas possuem o mesmo valor (quadrantes pares) ou o valor oposto (quadrantes ímpares), o que é apresentado em suas equações:





As equações das demais retas possíveis no plano cartesiano podem ser determinadas a partir da **Condição de Linearidade**, ou seja, "**Três pontos são colineares se a área do triângulo formado por eles é nula**".

Consideremos dois pontos fixos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B) por onde a reta r passa, e representemos por P(x, y) os demais pontos dessa reta.

Assim, temos que a reta pode ser descrita pela seguinte equivalência:

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r: ax + by + c = 0; \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{tais que } a = \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_B & 1 \end{vmatrix} = (y_A - y_B), \qquad b = -\begin{vmatrix} x_A & 1 \\ x_B & 1 \end{vmatrix} = (x_B - x_A)$$

$$\text{e } c = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} = (x_A y_B - x_B y_A).$$

Equação Geral da reta r é aquela dada por $r: ax + by + c = 0$.

Observe que fazendo uma manipulação algébrica simples na equação geral da reta r obtemos a chamada **Equação Reduzida** da reta r, ou seja:

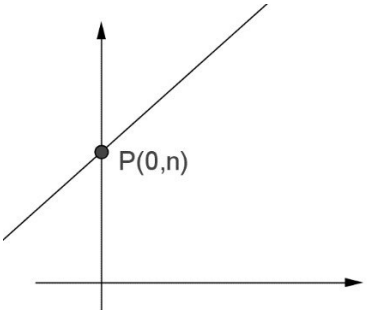
$$r: y = mx + n$$

Os valores reais m e n são chamados, respectivamente, de **coeficiente angular** e **coeficiente linear** da reta r.

Observe que o ponto de interseção entre a reta e o eixo-y possui $x = 0$, pois essa é a característica especial de todos os pontos do eixo-y, assim utilizando a equação reduzida da reta r temos:

$$r: y = m0 + n = n$$

Dessa forma, temos que o ponto de interseção da reta com o eixo-y é dado pelas coordenadas $x = 0$ e $y = n$.



<u>Observação</u>: Essa é uma das importantes funções do coeficiente linear da reta, determinar a interseção da reta com o eixo-y.

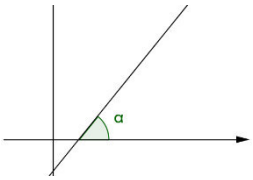
Por meio do coeficiente angular (m) pode-se avaliar o crescimento, ou decrescimento, da reta. Da equação geral para a reduzida tem-se que:

$$m = \frac{b}{a} = \frac{(x_B - x_A)}{(y_A - y_B)}$$

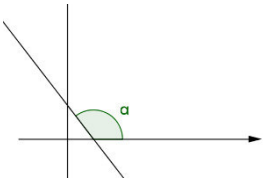
<u>Observação</u>: O nome de coeficiente angular vem do fato do valor (m) ser exatamente aquele dado pela tangente do ângulo α que a reta r faz com o eixo-x, ou seja, $m = tg(\alpha)$.

Observando a razão que determina (m) temos que:

- Se $m > 0$ então a reta r é crescente.



- Se $m < 0$ então a reta r é decrescente.



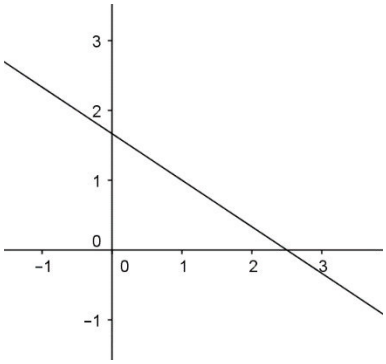
Se $m = 0$ então $x_B - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = x_B$ e, assim, a reta r é constante.

Observação: Observe que na equação geral da reta $r: ax + by + c = 0$, os valores a e b não são simultaneamente nulos, pois nesse caso $c = 0$ e, então, qualquer ponto do plano cartesiano poderia satisfazer a equação.

Exemplo: Determine o valor do coeficiente angular m da reta $r: 2x + 3y - 5 = 0$ e determine o crescimento dessa reta.

Resolução: A equação reduzida dessa reta r é dada por: $r: y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Logo, $m = -\frac{2}{3}$ e, portanto, a reta é decrescente.



Observação: Podemos confirmar a teoria através do gráfico dessa reta, conforme figura acima.

Podemos, ainda, desenvolver a equação geral da reta deixando-a em função do coeficiente angular e das coordenadas de um de seus pontos, por exemplo, o ponto $P_0(x_0, y_0)$. Assim temos: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Exemplo 1: Determine o coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(2, 5)$.

Resolução: Tomando $P(x, y) = B(2, 5)$ e $P_0(x_0, y_0) = A(1, 3)$temos :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow 5 - 3 = m(2 - 1) \Leftrightarrow m = 2.$$

Observação: Se a reta r possui coeficiente angular m, temos que uma reta perpendicular a ela possui coeficiente angular igual à $-m^{-1} = -\frac{1}{m}$. Isso equivale a dizer que **o produto dos coeficientes angulares de retas perpendiculares é igual à -1.**

Exemplo 2 (GV – 2003): Os pontos $A(-1, 4)$ e $B(3, 6)$ são simétricos em relação à reta r. O coeficiente angular da reta r vale:

a) -1 b) -2 c) -3 d) -4 e) -5

Resolução: Se os pontos A e B são simétricos em relação à reta r, o segmento $\overline{AB}$ é perpendicular à reta r, com coeficiente angular m_{AB}. Fazendo $A(-1, 4) = (x, y)$ e $B(3, 6) = (x_0, y_0)$, podemos usar a equação abaixo para obter o coeficiente angular. Assim temos:

$$y - y_0 = m_{AB}(x - x_0) \Leftrightarrow 4 - 6 = m_{AB}(-1 - 3) \Leftrightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$$

Como a reta que passa por A e B é perpendicular a r, seu coeficiente angular será -2.

Resposta: A alternativa correta é a letra **b.**

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE DUAS RETAS R E S

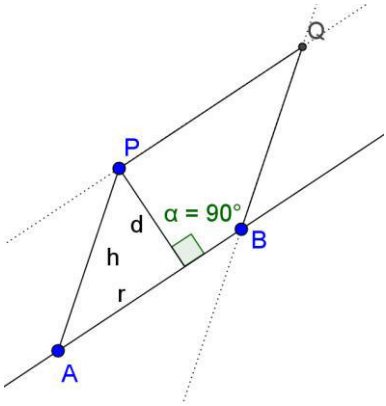
Observamos que os coeficientes angulares das retas são valores capazes de nos dizer muito sobre as retas. Por meio deles é possível estabelecer a posição relativa entre duas retas:

POSIÇÃO RELATIVAS DE RETAS	RETAS PARALELAS COINCIDENTES	RETAS PARALELAS DISTINTAS	RETAS CONCORRENTES
Relação entre os coeficientes angulares (m) e lineares (h)	$\boldsymbol{m_r = m_s}$ $\boldsymbol{h_r = h_s}$	$\boldsymbol{m_r = m_s}$ $\boldsymbol{h_r \neq h_s}$	$\boldsymbol{m_r \neq m_s}$

Observação: Retas Perpendiculares: $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Consideremos um ponto P(x_P, y_P) fixo e a reta r dada pela equação geral $r: ax + by + c = 0$. Para calcular a distância de P à reta r, vamos construir um paralelogramo considerando dois pontos sobre a reta r, A e B, o ponto P e um último ponto Q na interseção da reta paralela à reta r passando em P e a reta paralela àquela que passa por A e P, passando no ponto B (veja a figura a seguir).



Observe que a distância do ponto P à reta r, d(P, r) é igual a altura desse paralelogramo e que sua área é o dobro daquela do triangulo ABP. Assim, usando a fórmula do cálculo de área de triângulos e da distância entre os pontos A e B, temos a seguinte expressão:

$$\mathrm{d}(\mathrm{P},r)=\frac{\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{(x_A-x_B)^2-(y_B-y_A)^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemplo: Determine a distância entre $\mathrm{A}(2,5)$ e a reta $r: y=x-1$.

Resolução: A equação geral da reta dada é $-x+y+1=0$. Assim, para calcular a distância precisamos substituir as coordenadas do ponto A, $a=-1$ e $b=1$, da seguinte forma:

$$\mathrm{D}=|-1\cdot 2+1\cdot 5+1|=\pm 4$$

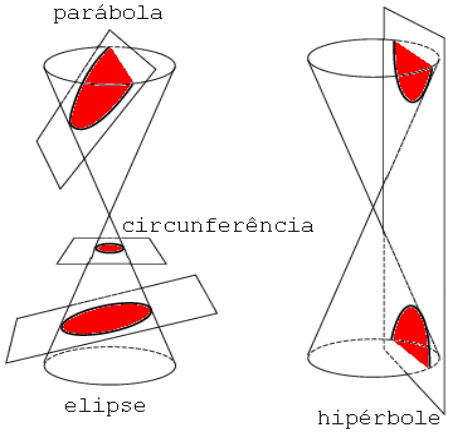
Logo:

$$\mathrm{d}(\mathrm{A},r)=\frac{|\mathrm{D}|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\pm 4}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\pm 4}{\sqrt{2}}=\pm 2\sqrt{2}=2{,}83.$$

Resposta: A distância entre o ponto A e a reta r é de, aproximadamente, 2,83.

CURVAS CÔNICAS

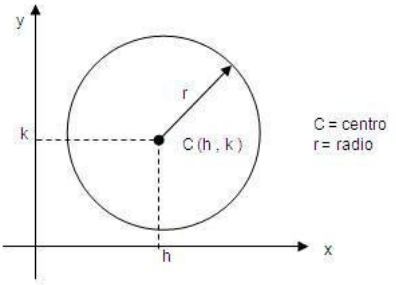
As curvas cônicas são assim chamadas, pois são a interseção de um plano com um cone de duas folhas infinito. A figura[16] a seguir ilustra isso:



[16] Extraída de http://www.coladaweb.com/matematica/conicas

1. Circunferência

Observamos que a característica principal de uma circunferência é que **seus pontos estão a uma mesma distância (r raio) de um ponto dado, chamado de centro da circunferência**. A figura[17] ao lado mostra isso. Vamos descrever tal característica em forma de equação.



Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência e $C(h, k)$ o seu centro.

Logo, $r = d(P, C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$, o que nos dá a **Equação Reduzida da circunferência** de centro C e raio r

$$c: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

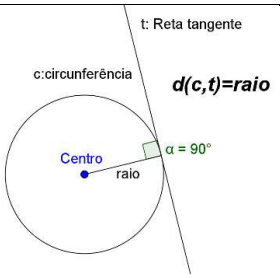
Uma pequena manipulação algébrica nessa equação resulta na Equação Geral da **circunferência:**

$$c: x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

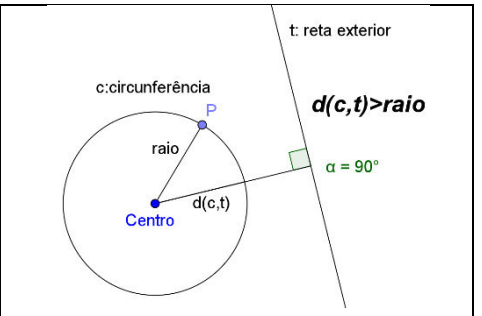
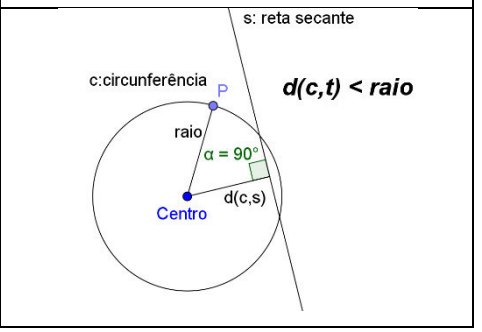
Os **elementos principais** dessa curva são:

- **Centro**: $C(h, k)$;
- **Raio**: $r \in \mathbb{R}$, tal que $r > 0$.

Quando observamos uma reta e uma circunferência, podemos encontrar três situações diferentes, quanto à posição delas. Observe-as:

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA	
1. Reta tangenciando a circunferência (reta tangente): nesse caso a distância entre a reta e o centro da circunferência é igual ao raio da circunferência.	

[17] Extraída de http://www.monografias.com/trabajos67/guia-matematicas-dos-ingreso/guia-matematicas-dos-ingreso2.shtml

2. Reta não intercepta a circunferência (reta exterior): aqui temos que a distância entre a reta e o centro da circunferência é maior que o raio da circunferência.	
3. Reta intercepta a circunferência em dois pontos (reta secante): agora a distância entre a reta e o centro da circunferência é menor que o raio da circunferência.	

Observe, a seguir, a resolução de um exemplo envolvendo tal conceito:

Exemplo (FATEC – jul/2016): Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, considere a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ e a reta $r: 3x + 7y - 21 = 0$. A reta s, que é paralela a r e contém o centro de λ, tem equação:

a) $3x + 7y - 2 = 0$ b) $3x - 7y - 2 = 0$ c) $3x + 7y + 5 = 0$

d) $3x + 7y - 16 = 0$ e) $7x + 3y - 2 = 0$

Resolução: O centro C de λ pode ser calculado através de uma manipulação algébrica na equação da circunferência. Divide-se os coeficientes de x e y por 2 e trocam-se seus sinais. Dessa forma:

$$\lambda: \left(x - \left(\frac{6}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{-2}{2}\right)\right)^2 = r^2$$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) \Rightarrow C(3, -1)$

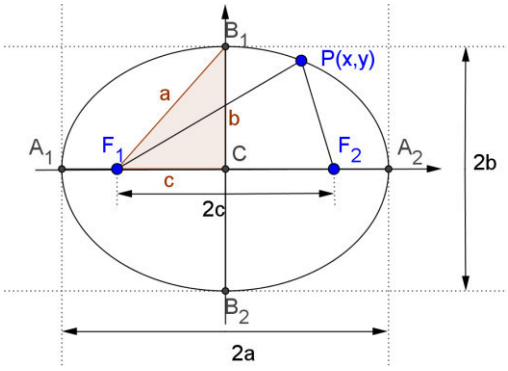
Se a reta s é paralela a r, deve ser do tipo $3x + 7y + k = 0$, com k real. Como contém o ponto C, então basta substituir as coordenadas do ponto C nessa equação. Assim:

$$3 \cdot 3 + 7(-1) + k = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

Resposta: A alternativa correta é a letra **a.**

2. Elipse

Dados dois pontos fixos no plano cartesiano, $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, podemos traçar uma curva com a seguinte característica: **A soma das distâncias de ponto qualquer $P(x, y)$ da curva aos pontos fixos é constante.**



Traduzindo essa característica temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Observação: A soma dessas distâncias é maior do que a distância entre os pontos fixos, isto é, $0 < 2c = d(F_1, F_2) < 2a$.

Os **elementos principais** dessa curva são:

- **Centro:** $C(h, k)$;
- **Focos:** $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$;
- **Pontos extremos (vértices) no eixo maior:** $A_1(x_{A_1}, y_{A_1})$ e $A_2(x_{A_2}, y_{A_2})$;
- **Pontos extremos (vértices) no eixo menor:** $B_1(x_{B_1}, y_{B_1})$ e $B_2(x_{B_2}, y_{B_2})$;
- **Medida do eixo maior:** $2a = 2d(A_1, C) = 2d(A_2, C)$;
- **Medida do eixo menor:** $2b = 2d(B_1, C) = 2d(B_2, C)$;
- **Medida focal** ou **distância focal:** $2c = 2d(F_1, C) = 2d(F_2, C)$.

Observe que o ponto B_1 pertence à elipse e como $d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2)$, podemos afirmar que $d(B_2, F_1) = a$ e, então, $a^2 = b^2 + c^2$.

Temos também que $0 \leq 2c \leq 2a$.

Usando as fórmulas de distância entre dois pontos e manipulações algébricas, temos a seguinte equação reduzida para a elipse de centro $C(h,k)$:

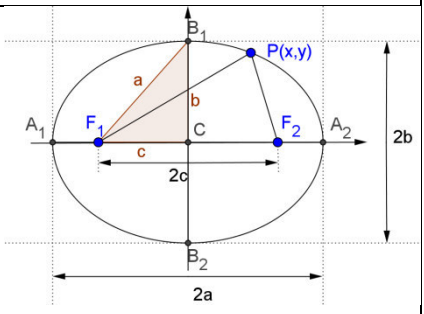
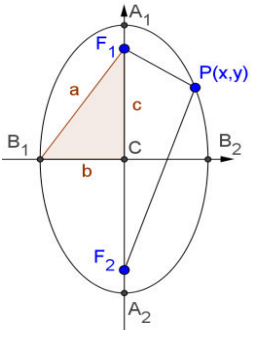
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Observamos que os pontos $F_1(x_1\,,y_1)$ e $F_2(x_2\,,y_2)$ sempre se posicionam sobre o **eixo maior** da curva. O eixo perpendicular a esse passando no centro da curva é chamado de **eixo menor**.

Observação: Quando o centro da curva coincide com a origem do plano cartesiano $(0,0)$, temos a forma padrão da curva:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Existem duas possibilidades para a curva na forma padrão, considerando seus eixos paralelos aos eixos coordenados e centro na origem do plano cartesiano:

Característica da curva	Equação Reduzida	Gráfico
Eixo maior da elipse paralelo ao eixo-x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
Eixo maior da elipse paralelo ao eixo-y	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	

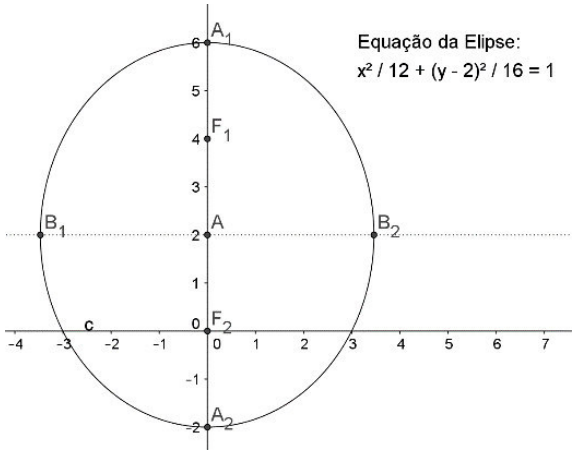
Exemplo: Determine uma equação para a elipse de focos em $F_1(0,0)$ e $F_2(0,4)$, cujo eixo maior mede 8. Esboce seu gráfico.

Resolução: Observando os dados do problema, vemos que a elipse possui eixo maior no eixo-y e centro no ponto médio dos pontos dados, assim $C(0,2)$, $a = 4\ e\ c = 2$.

Na elipse temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{3}$$

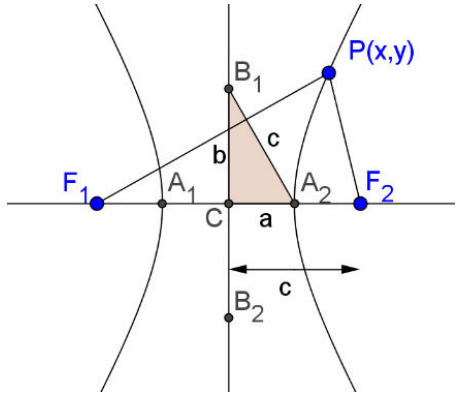
Assim: $\frac{(x-0)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$ Já o seu gráfico apresenta-se a seguir:



3. Hipérbole

Dados dois pontos fixos no plano cartesiano, $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ podemos traçar uma curva com a seguinte característica: **O módulo da diferença das distâncias de ponto qualquer Q(x, y) da curva aos pontos fixos é constante**. Traduzindo essa característica temos:

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$$



Os **elementos principais** dessa curva são:

- **Centro:** $C(h\,,k)$;
- **Focos:** $\mathrm{F}_1(x_1\,,y_1)$ e $\mathrm{F}_2(x_2\,,y_2)$;
- **Pontos extremos (vértices) no eixo real:** $\mathrm{A}_1\left(x_{A_1},\ y_{A_1}\right)$ e $\mathrm{A}_2\left(x_{A_2},\ y_{A_2}\right)$;
- **Pontos importantes no eixo imaginário:** $\mathrm{B}_1\left(x_{B_1},\ y_{B_1}\right)$ e $\mathrm{B}_2\left(x_{B_2},\ y_{B_2}\right)$;
- **Medida do eixo real ou transverso:** $2a = 2d\left(\mathrm{A}_1,\mathrm{C}\right) = 2d\left(\mathrm{A}_2,\mathrm{C}\right)$;
- **Medida do eixo imaginário:** $2b = 2d\left(\mathrm{B}_1,\mathrm{C}\right) = 2d\left(\mathrm{B}_2,\mathrm{C}\right)$;
- **Medida focal** ou **distância focal:** $2c = 2d\left(\mathrm{F}_1,\mathrm{C}\right) = 2d\left(\mathrm{F}_2,\mathrm{C}\right)$;
- **Excentricidade:** $e = \frac{c}{a}$.

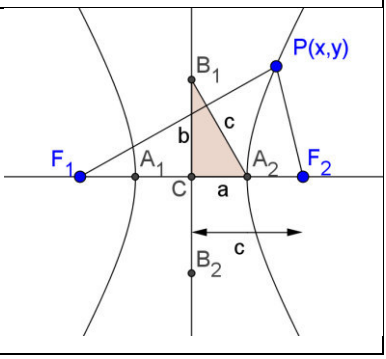
Como o ponto A_2 é ponto da hipérbole, temos que $c^2 = a^2 + b^2$ e também que $0 \leq 2a \leq 2c$.

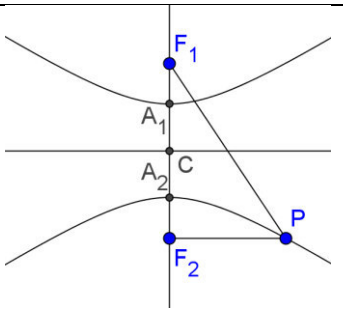
Usando as fórmulas de distância entre dois pontos e manipulações algébricas, teremos a seguinte equação reduzida:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Observamos que os pontos $\mathrm{F}_1(x_1\,,y_1)$ e $\mathrm{F}_2(x_2\,,y_2)$ sempre se posicionam sobre o **eixo maior** da curva. O eixo perpendicular a esse passando no centro da curva é chamado de **eixo menor**.

<u>Observação</u>: Quando o centro da curva coincide com a origem do plano cartesiano $(0,0)$, temos duas possibilidades de forma padrão para essa curva, conforme seu eixo real é paralelo aos eixos coordenados.

Característica	Equação Reduzida	Gráfico
Eixo real da hipérbole paralelo ao eixo-x	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	

Eixo real da hipérbole paralelo ao eixo-y	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	

Exemplo: Descubra que curva é dada pela equação $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 2 = 0$. Determine seus elementos principais e esboce o gráfico.

Resolução: A partir da equação dada, completemos os quadrados considerando cada uma das variáveis, da seguinte forma:

$$x^2 - y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow [(x^2 + 4x + 4) - 4] - [(y^2 - 6y + 9) - 9] - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - (y - 3)^2 = 1$$

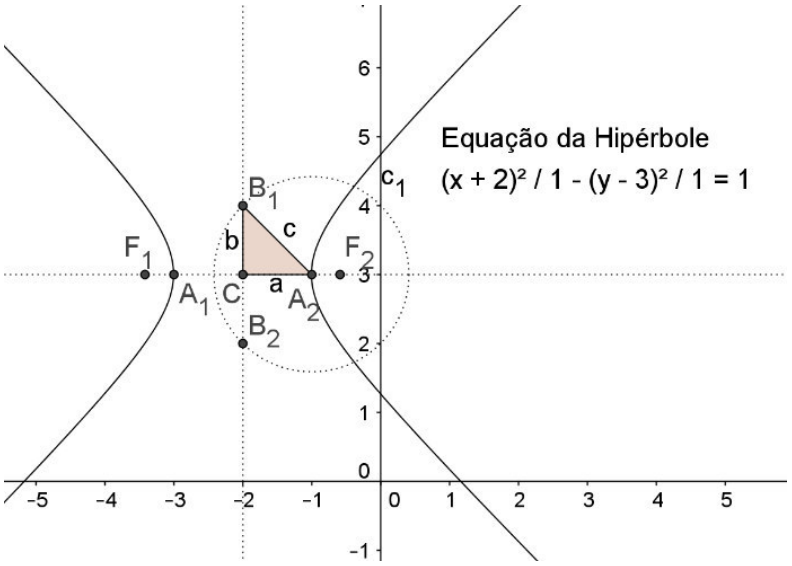
Assim, temos que se trata de uma hipérbole, cujo eixo maior e eixo menor possuem a mesma medida, isto é, $a = b = 1$, o que implica que:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}.$$

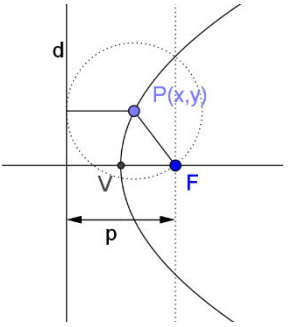
Portanto, os elementos principais são:

$C = (-2, 3)$	$A_1 = (-3, 3)$,	$A_2 = (-1, 3)$,	
$B_1 = (-2, 4)$	$B_2 = (-2, 2)$	$F_1 = (-2 - \sqrt{2}, 3)$	$F_2 = (-2 + \sqrt{2}, 3)$

A seguir é esboçado o gráfico de tal hipérbole:



4. Parábola



Dados um ponto fixo no plano cartesiano, $F(x_1, y_1)$ e uma reta d podemos traçar uma curva com a seguinte característica: **A distância de ponto qualquer P(x,y) da curva ao ponto fixo é igual a distância desse ponto P à reta d.**

Traduzindo essa característica temos:

$$|d(P,F) = d(P,d)|$$

Os **elementos principais** dessa curva são:

- **Vértice:** $V(h, k)$;
- **Foco:** $F(x_1, y_1)$;
- **Reta diretriz:** d;
- **Distância focal:** $c = d(V, F)$;
- **Distância do foco à reta diretriz d:** $p = 2$.

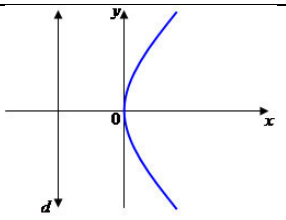
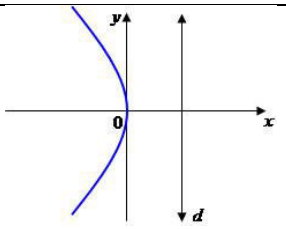
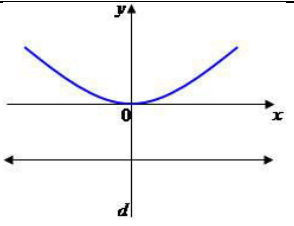
Usando as fórmulas de distância para pontos e retas e manipulações algébricas teremos a seguinte equação reduzida:

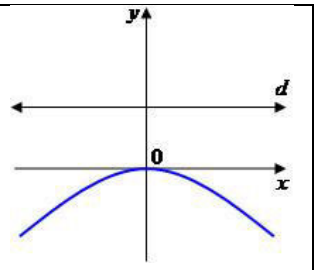
$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \quad ou \quad (y-k)^2 = 2p(x-h)$$

Observamos que os pontos $F(x_1,\ y_1)$ e $V(h,k)$ sempre se posicionam sobre o **eixo de simetria da curva**. Assim se o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo-x, as coordenadas do foco são $F = \left(h + \frac{p}{2}\ , k\right)$ e a reta diretriz será $x = h - \frac{p}{2}$.

No caso do eixo de simetria da curva ser paralelo ao eixo-y temos $F = \left(h\ , k + \frac{p}{2}\right)$ e a reta diretriz dada por $y = k - \frac{p}{2}$.

Observação: Quando o vértice da curva coincide com a origem do plano cartesiano $(0,0)$, temos quatro possibilidades de forma padrão para essa curva, conforme seu eixo de simetria é paralelo aos eixos coordenados e considerando sua concavidade:

Característica	Equação Reduzida	Concavidade	Gráfico
Eixo de simetria paralelo ao eixo-x	$y^2 = 2px$	Para à direita $p > 0$	
		Para à esquerda $p < 0$	
Eixo de simetria paralelo ao eixo-y	$x^2 = 2py$	Para cima $p > 0$	

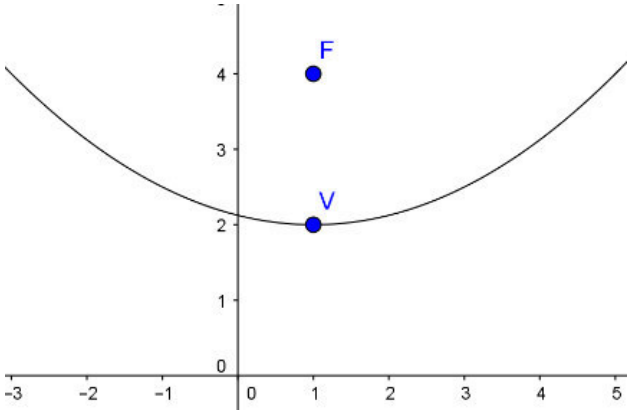
		Para baixo $p < 0$	

Exemplo: Determine a equação da parábola que possua seu vértice no ponto $\mathrm{V}(1,2)$ e foco no ponto $\mathrm{F}(4,2)$.

Resolução: Como $\frac{p}{2} = d(\mathrm{V},\mathrm{F}) = 2 \Leftrightarrow p = 4 > 0$. Como o vértice e o foco estão na mesma reta $y = 2$, temos que a parábola tem seu eixo de simetria nessa reta com a concavidade voltada para cima e, portanto a equação padrão é dada por:

$$(x-1)^2 = 2p(y-2) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 8(y-2)$$

Equação geral: $x^2 - 8y - 2x + 17 = 0$. Observe, a seguir, o seu gráfico:



Não se esqueça de resolver os exercícios, referentes a este capítulo, que se encontram no **Caderno de Exercícios** disponibilizado na página da web.

REFERÊNCIAS

AMARAL, A. A. *Projeto construtivo na arte (1950-1962)*. Rio de Janeiro: Museu de Arte Moderna; São Paulo: Pinacoteca do Estado, 1977.

BENSENOR, I. M.; LOTUFO, P. A. *Epidemiologia*: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011.

CAMPOS, A.; PLAZA, J. *Poemóbiles*. São Paulo: Ofset, 1974.

INOVAR: Sistema de Ensino. Agudos: Ed. ISE, 2012. (Coleção Aprender).

MUNARI, B. *Design e comunicação visual*: uma contribuição para uma metodologia didática. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

NAVES, R. *A forma difícil*: ensaios sobre arte brasileira. São Paulo: Ática, 1996.

O MUSEU de Arte Contemporânea da Universidade de São Paulo. São Paulo: Banco Safra, 1990.

PROJETO Arte Brasileira: abstração geométrica 1: concretismo e neoconcretismo. Rio de Janeiro: FUNARTE, Instituto Nacional de Artes Plásticas, 1977.

THE OFFICIAL Website of M.C.Escher. Disponível em: <http://www.mcescher.com>. Acesso em: 20 jun. 2015.

CRÉDITOS DAS FIGURAS

<http://www.uv.es/~buso/escher/totpod_es.html>. Acesso em: 20 jun 2015.

<http://professor-rodrigo-sesi.wikispaces.com/Fun%C3%A7%C3%A3o+Logar%C3%ADtmica>. Acesso em: 12 jun. 2015.

<http://prof-cassiofernando.blogspot.com.br/2012/06/f-u-n-c-o-e-x-p-o-n-e-n-c-i-l.html>. Acesso em: 15 jun. 2015.

<http://pt.slideshare.net/faustois/calclo-1-2-termo-de-papel-e-celulose>. Acesso em: 20 jun. 2015.

<http://pt.slideshare.net/faustois/calclo-1-2-termo-de-papel-e-celulose>. Acesso em: 20 jun. 2015.

<http://pt.slideshare.net/faustois/calclo-1-2-termo-de-papel-e-celulose>. Acesso em: 20 jun. 2015.

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap61s1.html>. Acesso em: 20 jun. 2015.

<http://www.edusocial.com.br/blog/article/veriicar-se-um-graico-representa-uma-funcao>. Acesso em: 20 jun. 2015.

<http://www.engenheirodepetroleo.com.br/pt/provas-resolvidas/engenheiro-de-petroleo/cesgranrio-2011-engenheiro-de-petroleo-q22/>. Acesso em: 20 jun. 2015.

<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poliedros-regulares.htm>. Acesso em: 05 nov. 2016

Observação: As questões do ENEM e vestibulares foram extraídas de diferentes *sites*, disponíveis na Internet.

Pró-Reitoria de Extensão – PROEX

Cadernos dos Cursinhos Pré-Universitários da UNESP

FUNDAÇÃO vunesp

PROEX
PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Reitoria

ISBN 978-85-7983-821-7